Revista Eletrônica de Educação Matemática, vol. 15, 2020, pp. 01-21.

ESTUDO DA CIRCUNFERÊNCIA À LUZ DOS PRINCÍPIOS AXIOMÁTICOS DE RENÉ DESCARTES. UM OLHAR AO CONTEXTO DE ENSINO-APRENDIZAGEM DA ESCOLA SUPERIOR PEDAGÓGICA DO BIÉ (ESP-BIÉ).

Ezequias Cassela y Rosa de Nascimento.

Artigo Original

REVEMAT
REVISTA ELETRÔNICA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

ESTUDO DA CIRCUNFERÊNCIA À LUZ DOS PRINCÍPIOS AXIOMÁTICOS DE RENÉ DESCARTES. UM OLHAR AO CONTEXTO DE ENSINO-APRENDIZAGEM DA ESCOLA SUPERIOR PEDAGÓGICA DO BIÉ (ESP-BIÉ)

Study of circumference in the light of rené descartes axiomatic principles. A look at the teaching-learning context of the bié's pedagogical high school (esp-bié)

Ezequias Adolfo **CASSELA**
Escola Superior Pedagógica do Bié, Cuito-Bié, Angola
ezequiasadolfo@hotmail.com
https://orcid.org/0000-0001-7703-0097

Rosa Maria de **NASCIMENTO**
Escola Superior Pedagógica do Bié (ESPB), Cuito/Bié-Angola
Nascimento22@hotmail.com
https://orcid.org/0000-0001-7836-7441

A lista completa com informações dos autores está no final do artigo

RESUMO

Neste artigo apresenta-se um estudo relativo à circunferência, com base ao programa de Geometria Analítica do primeiro ano do curso de Matemática da Escola Superior Pedagógica do Bié, seguindo os princípios lógico-dedutivos introduzidos por René Descartes. A visão original que esteve na base deste estudo, tem a ver com um diagnóstico feito ao primeiro autor através de uma breve apresentação oral de um tema matemático de nível elementar referente ao ensino da circunferência, no âmbito do plano curricular da cadeira de Projecto de Ensino I do Curso de Mestrado em Matemática para Professores na Universidade de Beira Interior em Portugal. Cujo resultado do diagnóstico revela um rol imenso de insuficiências, relativamente a incapacidade do docente em lecionar o conteúdo da circunferência na perspectiva de um ensino que parte do mais simples para o mais complexo, demonstrando os resultados na base de teoremas e proposições adaptados a priori, o que promovia uma aprendizagem menos significativa por parte dos estudantes, neste âmbito. Neste sentido, pretende-se inverter esse quadro, com a realização desta pesquisa cujo objetivo é contribuir para o melhoramento do ensino da Geometria Analítica com particular realce ao tema da circunferência no curso de Matemática da Escola Superior Pedagógica do Bié. A mesma está encaminhada com vista a dar resposta a seguinte questão da pesquisa: como melhorar o ensino e aprendizagem da Geometria Analítica com ênfase ao tema da circunferência, nos alunos do primeiro ano do curso de Matemática da Escola Superior Pedagógica do Bié? A orientação metodológica é do tipo qualitativo e a abordagem descritiva, pois tratou-se de observar, analisar e descrever os procedimentos de resolução utilizados pelos professores e estudantes no estudo da circunferência, incluindo a revisão bibliográfica dos materiais de apoio utilizados como bibliografia básica na referida disciplina.

Palavras-chave: Ensino da Geometria Analítica, Circunferência, Princípios axiomáticos de René Descartes

ABSTRACT

This article presents a relative study to the circumference, with base to the program of Analytical Geometry of the first year of the course of Mathematics of the Pedagogic Superior School of Bié, following the logical-deductive beginnings introduced by René Descartes. The original vision that was in the base of this study, has to do with a diagnosis done to the first author through an abbreviation oral presentation of a mathematical theme of elementary level regarding the teaching of the circumference, in the extent of the plan curricular of the chair of Project of Teaching I of the Course of Master's degree in Mathematics for Teachers in the University of Interior Edge in Portugal. Whose result of the diagnosis reveals an immense list of inadequacies, relatively the teacher's incapacity in teaching the content of the circumference in the perspective of a teaching that leaves of the simplest for the more compound, demonstrating the results in the base of theorems and propositions adapted a priori, what promoted a less significant learning on the part of the students, in this extent. In this sense, it intends to invert that picture, with the accomplishment of this research whose objective is to contribute for the improvement of the teaching of the Analytical Geometry with matter it enhances to the theme of the circumference in the course of Mathematics of the Pedagogic Superior School of Bié. The same is directed with view to give answer the following subject of the research: how to improve the teaching and learning of the Analytical Geometry with emphasis to the theme of the circumference, in the students of the first year of the course of Mathematics of the Pedagogic Superior School of Bié? The methodological orientation is of the qualitative type and the descriptive approach, because it was observed, to analyze and to describe the resolution procedures used by the teachers and students in the study of the circumference, including the bibliographical revision of the support materials used as basic bibliography in the referred discipline.

Keywords: Teaching of Analytical Geometry, Circumference, Axiomatic Principles of René Descartes

1 INTRODUÇÃO

A Geometria é um dos ramos da Matemática que exerce um papel preponderante na vida do homem. Como todo o ramo do conhecimento, nasceu da necessidade da análise dos problemas da realidade objetiva, é revestida de capital importância porque através dela os indivíduos se conectam com o mundo em que vivem. Ela é uma abstração intuitiva da realidade objetiva, tal fato é notório quando se estuda os acontecimentos relacionados ao seu surgimento, conforme se constata no seguinte argumento de Boyer (2011):

> (...) Segundo o historiador grego Heródoto (sec. V a.C.), a geometria teve a sua origem em problemas práticos relacionados com a agrimensura ou medição de terrenos, no Egito antigo, mas sabe-se hoje que outras civilizações pré-helênicas já possuíam conhecimentos de natureza geométrica (p.35).

As ideias anteriores a revestem de capital importância, pois os conhecimentos, as intuições e as relações a ela inerentes ajudam os indivíduos a desenvolverem a realidade em que estão inseridos e a melhorarem as suas relações com o meio que os rodeia. Isto revela as potencialidades do Ensino da Geometria na formação dos alunos e de maneira geral, na formação do tipo de homem que a sociedade necessita.

Por outro lado, apesar da importância que se confere à Geometria, ela constitui uma das áreas da Matemática que apresenta maiores dificuldades de aprendizagem por parte dos alunos e que requer de uma especial atenção através do trabalho pedagógico e investigativo. O conjunto imenso destas dificuldades está intimamente relacionado com as mais variadas áreas da Geometria. São exemplos disso: a Geometria plana, a Geometria Espacial, a Geometria analítica. No caso concreto da Geometria Analítica alvo da presente pesquisa, durante os anos de experiências do primeiro autor como professor desta cadeira no primeiro ano do curso de Matemática da Escola Superior Pedagógica do Bié, quando se tratava das aulas relacionadas com os conteúdos da circunferência, os alunos apresentavam dificuldades em dar explicações acerca da origem da equação reduzida e geral da circunferência; da principal propriedade que justifica a razão dela ser considerada como um lugar geométrico e da identificação da circunferência a partir de condições sobre os coeficientes de uma equação polinomial do 2º grau em duas variáveis.

Em sede destas dificuldades, o emprego de métodos tradicionais, responsáveis por um “ensino-aprendizagem que não provoca reflexões nos alunos”[1], sustentado pelo predomínio de exercícios rotineiros sem demonstrações prévias na obtenção de fórmulas geométricas é apontada por Cassela (2018), em sua dissertação de mestrado sobre o “ensino da Geometria Analítica no contexto cultural do Cuito/Bié” como uma das causas, a qual tem promovido a falta de interesse na aprendizagem dos conteúdos ligados a esta cadeira por parte dos alunos e consequentemente o mal desempenho acadêmico na sua aprendizagem.

Preocupado com esta situação, o primeiro autor deste artigo, na qualidade de professor de Geometria Analítica, no curso de Matemática 1º ano da Escola Superior Pedagógica do Bié, enquanto estudante do curso de Mestrado em Matemática para professores na Universidade de Beira Interior em Portugal, escolheu direcionar a sua linha de investigação no ramo da Geometria Analítica. Nesta conformidade, foi submetido à um diagnóstico, no âmbito da cadeira de Projeto de Ensino I, através de uma breve apresentação oral de um tema matemático de nível elementar por ele escolhido referente ao ensino da circunferência.

Neste particular foi observada alguma falta de rigor na apresentação da aula, exposição de fórmulas de forma “pronta e acabada” e algumas transições bruscas entre conteúdos de graus de dificuldade distintos, revelando assim as insuficiências da sua prática docente. Na intensão de melhorar este quadro os autores deste artigo foram conduzidos a realizar um estudo da circunferência de acordo com os comentários recebidos e com algumas leituras recomendadas nos seguintes livros: curso de Geometria, de Paulo Ventura Araújo (2012) e A Matemática do Ensino Médio, Volume 3, Capítulo I, secção 10, SBM, Coleção Professor de Matemática (2006).

Como resultado deste estudo, escreveu-se o presente artigo cuja finalidade visa contribuir para o melhoramento do ensino da Geometria Analítica com particular realce ao

[1] É necessário provocar o desejo de aprender, “problematizando o conteúdo, tornando-o interessante e não tirar o sabor da descoberta dando respostas prontas”(Santos, 2008, citado por Quitembo, 2020, p.8).

tema da circunferência no curso de Matemática da Escola Superior Pedagógica do Bié. A mesma está encaminhada com vista a dar resposta à seguinte questão da pesquisa: como melhorar o ensino e aprendizagem da Geometria Analítica com ênfase ao tema da circunferência, nos alunos do primeiro ano do curso de Matemática da Escola Superior Pedagógica do Bié?

Face a esta descrição, apresenta-se, em seguida, um breve resumo histórico de René Descartes e Pirre Fermat na perspectiva da criação da Geometria Analítica. Na sequência, faz-se uma abordagem inerente ao processo de ensino-aprendizagem da Geometria Analítica na Escola Superior Pedagógica do Bié, seguindo-se de uma caracterização sobre o estudo da circunferência com base ao programa de Geometria Analítica do primeiro ano do curso de Matemática na ESP-Bié. Outro aspecto importante a ter em conta é a fundamentação metodológica, onde apresenta-se uma sintése referencial inerente aos procedimentos metodológicos adotados. Apresenta-se a continuidade a análise e resultados, seguindo-se das considerações finais.

2 BREVE RESUMO HISTÓRICO DE DESCARTES E PIERRE DE FERMAT NA PERSPECTIVA DA CRIAÇÃO DA GEOMETRIA ANALÍTICA

Nesta seção apresenta-se uma descrição histórica relativa a René Descartes e Pierre de Fermat, apoiando-se em alguns excertos traduzidos informalmente e adaptados da obra de Morris Kline (1967) “Mathematics for the Nonmathematician”, isto é, Matemática para Não Matemáticos.

René Descartes (1596-1650) é considerado o pai da Matemática moderna e da Filosofia moderna. Convencido de que o conhecimento obtido na sua formação académica ou não era útil ou não era absolutamente confiável, Descartes procurou afastar todas as opiniões, dogmas, preconceitos, decretos das autoridades e tudo aquilo que ele considerava serem noções pré-concebidas. Começou então uma reconstrução do pensamento com o objetivo de obter conhecimento verdadeiro e confiável. Inspirado pelos geómetras e pela longa cadeia de raciocínios simples e fáceis de compreender que estes usavam para chegar às conclusões das suas demonstrações mais difíceis, Descartes concluiu que “todas as coisas que o homem tem competência para conhecer estão naturalmente encadeadas da mesma forma”.

Descartes acreditava que a Matemática era "um instrumento do conhecimento mais poderoso do que qualquer outro" e procurou retirar do seu estudo um conjunto de princípios gerais que dessem um método para obter conhecimento exato em todas as áreas. Seguindo o padrão matemático em que os resultados são deduzidos a partir de um conjunto de axiomas iniciais, estabeleceu um conjunto de princípios fundamentais alguns dos quais, em função da intenção deste artigo se citam a seguir:

- Começar com verdades evidentes e inquestionáveis;
- Dividir grandes problemas em problemas mais pequenos e proceder do mais simples para o mais complexo;

Na Matemática, a grande contribuição de Descartes, juntamente com a de outro grande matemático francês - Pierre de Fermat foi a de desenvolverem uma nova abordagem da geometria baseada em métodos algébricos para descrever e representar curvas. As razões pelas quais os matemáticos do século XVII estavam tão interessados no estudo de curvas foram em geral motivadas pelo desenvolvimento da ciência e pela vasta expansão comercial e industrial da época. Apesar de muitas destas curvas já serem conhecidas e estudadas pelos gregos muitos séculos antes, não havia no seu estudo uma preocupação com as aplicações imediatas, pelo que não era considerada uma questão a falta de método para determinar procedimentos gerais para o estudo das curvas.

Descartes aproveitou o progresso feito na Álgebra na segunda metade do século XVI e no princípio do século XVII, nomeadamente com os contributos de Cardano, Tartaglia, Vieta, do próprio Descartes e de Fermat, ao estudarem a teoria das soluções de equações, ao introduzirem o simbolismo (a ideia de usar coeficientes gerais em equações algébricas foi de François Vieta, matemático francês que viveu entre 1540 e 1603) e ao estabelecerem viários teoremas e métodos algébricos.

Nestes avanços Descartes ficou especialmente impressionado com a possibilidade dada pela Álgebra ao homem de raciocinar de forma eficiente e de mecanizar o pensamento, produzindo resultados de forma quase automática. Foi nesta perspectiva, segundo Pickover (2009, p. 136) que "em 1637, publicou La *geómétrie*, que mostra como as formas e as figuras podem ser analisadas através da álgebra", cujo trabalho resultou na junção da Geometria (parte concreta) e da Álgebra (parte abstrata) fazendo surgir, desta forma a Geometria Analítica, que de acordo com o autor referenciado é definida como "o ramo da Matemática que contempla a representação de posições num sistema de coordenadas em que os matemáticos analisam algebricamente essas posições."

3 PROCESSO DE ENSINO-APRESENDIZAGEM DA GEOMETRIA ANALÍTICA NA ESCOLA SUPERIOR PEDAGÓGICA DO BIÉ

O processo de ensino-aprendizagem da Geometria analítica na Escola Superior Pedagógica do Bié está concebido em conformidade com as políticas educacionais do Estado angolano, definidas na Lei de Bases do Sistema Educativo, Lei 17/16 de 7 de outubro, aprovada em 2016 pela Assembleia Nacional da República, pois visa contribuir para a formação da concepção científica do mundo mediante a compreensão dos conceitos fundamentais a ela inerente por parte do estudante, com vista ao desenvolvimento de habilidades e competências necessárias que estejam a altura das exigencias sociais e do mercado do trabalho, tal como se constata na descrição que se segue: "(...) preparar o ingresso dos estudantes ao mercado de trabalho e desenvolver o pensamento lógico e abstrato bem como a capacidade de avaliar a aplicação de modelos científicos para a resolução de problemas da vida prática (…)." (p.35)

Nesta lei se percebe claramente a exigência que recai às instituições angolanas no sentido de estabelecerem uma correspondência entre os objetivos de formação e os do desenvolvimento do País, os quais se materializam através da unidade dos objetivos, conteúdos, e métodos de formação, garantindo a articulação horizontal e vertical permanente dos subsistemas, níveis e modalidades de ensino. Neste sentido, para se conseguir tal desiderato, as instituições em obediência aos órgãos ministeriais pautaram pela reestruturação dos planos curriculares, dos programas, assim como as metodologias para o ensino.

Do anterior, importa realçar que apesar destas exigências ainda é notório o tratamento dos conteúdos com métodos essencialmente reprodutivos apresentados através de exposição de fórmulas, de forma pronta, acabada, partindo de definições, exemplos, seguidos de exercícios de aprendizagem e fixação, esperando-se com isso que o aluno aprenda pela reprodução dos procedimentos algébricos conducentes a representação de objetos geométricos estudados. Esta indicação denota a resistência do abandono ao paradigma conservador, uma vez que se mudaram as tendências pedagógicas, mas não os processos. O ensino da Geometria analítica, ainda é marcado por métodos que não focalizam a compreensão; os passos metodológicos para resolver qualquer problema; demonstração de proposições e teoremas, entre outros. E como consequência, os estudantes não compreendem o que se transmitiu; mecanizam e aplicam esses passos sem compreender o que fazem; memorizam as fórmulas e os passos ou etapas e resolvem com passos memorizados. Por outro lado, a aprendizagem dos conteúdos não é significativa[2], pois é apenas memoristicas, reprodutiva, promovendo a falta de interesse e motivações. Biondo (2017), em sua dissertação de mestrado defendida na Universidade do Porto, sobre o "Ensino da Matemática no primeiro Ciclo", demonstra a preocupação de um ensino da Matemática fundamentado nos padrões tradicionais, ao fazer referência de um dos argumentos da Associação de Professores de Matemática (APM) de Portugal, o qual é reproduzido em seguida:

> "(...) A aprendizagem da Matemática é sempre produto da atividade e se ela se reduz, por exemplo à resolução repetitiva de exercícios para aplicação de certas fórmulas, é exatamente isto que se aprende e vai perdurar, enquanto ficar a memória das fórmulas (…)." (1988, p. 56).

Esta ideia mostra claramente que o ensino da Matemática deve possibilitar os alunos a analisar, discutir, conjecturar, demonstrar proposições, lemas e teoremas para que se abra o horizonte de aplicação dos conhecimentos adquiridos nas atividades do seu dia-a-dia.

4 CARATERIZAÇÃO SOBRE O ESTUDO DA CIRCUNFERÊNCIA COM BASE AO PROGRAMA DE GEOMETRIA ANALÍTICA DO PRIMEIRO ANO DO CURSO DE MATEMÁTICA NA ESP-BIÉ

O programa da Geometria Analítica do primeiro ano do curso de Matemática da ESP-Bié, está dividido em duas partes: Geometria Analítica 1 e 2 e do ponto de vista estrutural obedece a seguinte sequência: objetivos gerais, sistema de conteúdo, sistema de habilidades, sistema de avaliação, orientações metodológicas e referências bibliográficas. O sistema de conteúdos está composto por capítulos e o estudo da circunferência faz parte do primeiro capítulo do programa de Geometria Analítica 2, com o seu ensino-aprendizagem, espera-se que os estudantes desenvolvam as seguintes habilidades: conhecer o conceito da circunferência, conhecer a sua equação reduzida e geral e resolver exercícios.

[2] A aprendizagem significativa é definida por Ausubel como um processo pelo qual uma nova informação se relaciona com um aspeto relevante da estrutura de conhecimento do indivíduo. Ou seja, neste processo a nova informação interage com uma estrutura de conhecimento específica a qual Ausubel define como conceito subsunçor ou, simplesmente, subsunçor (subsumer), existente na estrutura cognitiva do indivíduo (Moreira & Masini, 2001,p.17).

Os autores deste artigo, reconhecem a necessidade de se repensar o sistema de habilidades necessárias para o ensino da circunferência, uma vez que o seu processo de ensino-aprendizagem dá conta de algumas limitações por parte dos alunos, sobre tudo em dar explicações acerca da origem da equação reduzida e geral da circunferência; da principal propriedade que justifica a razão dela ser considerada como um lugar geométrico e da identificação da circunferência a partir de condições sobre os coeficientes de uma equação polinomial do 2º grau em duas variáveis, bem como na aplicação destes conhecimentos para a resolução de alguns problemas relacionados com os seus contextos.

Torna-se necessário elevar o grau de motivação para a aprendizagem deste conteúdo, sendo fundamental, no entanto, a criação de um ambiente que estimule o desenvolvimento da criatividade, autonomia e independência. Nesta perspectiva, para o alcance do objetivo determinado nesta pesquisa, foram considerados alguns procedimentos metodológicos, conforme se constata no item que se segue.

5 FUNDAMENTAÇÃO METODOLÓGICA

A pesquisa realizada é do tipo qualitativo[3] de natureza descritiva, pois tratou-se de observar, analisar e descrever os procedimentos de resolução utilizados pelos professores e estudantes no estudo da circunferência. Os instrumentos aplicados incluem uma entrevista realizada a dois professores de Geometria Analítica, com o objetivo de obter informações acerca do seu desempenho no ensino-aprendizagem da circunferência; guia de análise documental relativa ao programa da disciplina, manual didático utilizado e do caderno de anotações do estudante. Ainda nesta perspectiva foi feita uma revisão bibliográfica dos materiais de apoio utilizados como bibliografia básica na referida disciplina. A análise documental, a entrevista realizada e a experiência do primeiro autor como professor da disciplina, permitiram identificar dificuldades quanto ao reconhecimento da circunferência como lugar geométrico, assim como nos procedimentos utilizados para a determinação das equações reduzida e geral da circunferência, caracterizados pela aplicação direta de definições e fórmulas em exercícios para a fixação do conteúdo.

[3] Na pesquisa qualitativa “o investigador interpretativo observa participativamente, de dentro do ambiente estudado, imerso no fenômeno de interesse, anotando cuidadosamente tudo o que acontece nesse ambiente, registando eventos, coletando documentos tais como trabalhos dos alunos, materiais distribuídos pelo professor” (Moreira, 2003, p.24).

6 ANÁLISE E RESULTADOS

Nesta seção faz-se uma análise dos dados recolhidos através do procedimento metodológico acima referido com vista a obtenção da informação necessária e suficiente para se dar resposta a questão da pesquisa determinada. Neste âmbito, apresentam-se os resultados obtidos através da entrevista feita aos dois professores; da análise do programa e do manual do estudante, bem como do seu caderno de anotações.

Para a realização da referida entrevista aos dois docentes da cadeira de Geometria Analítica da escola investigada, os autores serviram-se da Google forms, cujas perguntas e respostas abaixo se apresentam.

Como tens lecionado o conteúdo inerente ao estudo da circunferência?

2 respostas

Como este é um tema que já vem sendo trabalhado desde o ensino médio normalmente sigo a orientação exposta no manual, partindo da sua definição, recordamos a suas equações e seguidamente aplicamos alguns exemplos.

Por ser um conteúdo bastante elementar, dou o seu conceito, explicamos as suas equações e trabalhamos em exercícios de aplicação.

Figura 1: Imagem da primeira pergunta feita aos docentes em entrevista.
Fonte: Própria

Este resultado revela a ideia de que os professores desenvolvem o ensino-aprendizagem da circunferência com base aos padrões rotineiros e aplicam as fórmulas de forma mecânica em determinados exercícios, sem conduzir os alunos à uma análise que estimule a criatividade e a autonomia, contrapondo com o exposto por Santos (2008) que promove a problematização do conteúdo como requisito fundamental para despertar a reflexão, estimular a demonstração de resultados por parte dos alunos com vista a tornar significativa a sua aprendizagem.

No âmbito do estudo da equação geral de uma circunferência ajudas os alunos a identificar uma circunferência a partir de condições sobre os coeficientes de uma equação polinomial do 2º grau em duas variáveis

2 respostas

Para esse estudo aprofundamos apenas aquilo que é relevante e o resto os estudantes investigam.

Nem sempre.

Figura 2: Imagem da segunda pergunta feita aos docentes em entrevista.
Fonte: Própria

As respostas dadas pelos professores dão conta de um ensino-aprendizagem do tema em estudo limitado ao que vem plasmado no programa, tornando o professor como o centro do processo, impedindo que o aluno tenha uma base estrutarada de conhecimento que o possibilite questionar, criticar e demonstrar os resultados com base a um encadeamento lógico.

No caso de confirmação da questão, diga em que condições a equação do tipo Ax^2 +By^2+Cxy+Dx+Ey+F=0 é considerada uma circunferência?

2 respostas

É uma circunferência se o o quadrado de D mais a soma do quadrado de E menos 4F for maior que zero.

Está parte não tem sido aprofundada porque não faz parte do programa.

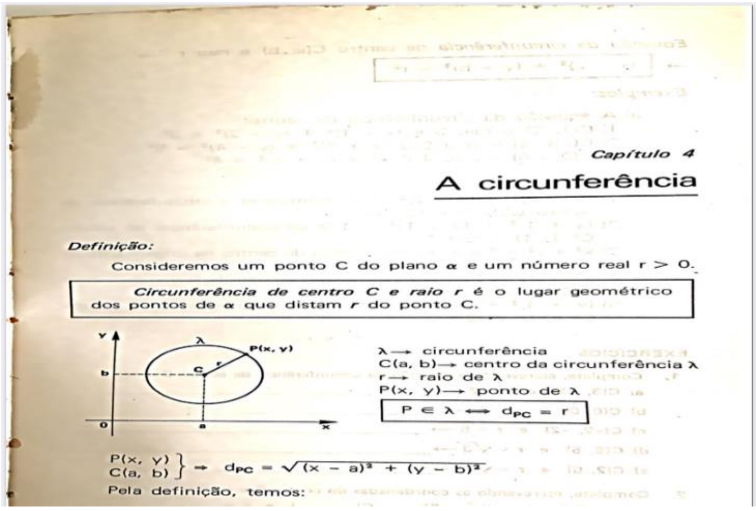
Figura 3: Imagem da terceira pergunta feita aos docentes em entrevista.
Fonte: Própria

A resposta dada pelo primeiro professor denota alguma noção relativamente a resposta desejada, embora esteja incompleta. Quanto a segunda resposta, o professor mostra claramente a sua prespectiva reducionista do ensino sustentada pelas limitações constantes do programa da cadeira, fato que limita a aprendizagem dos alunos no âmbito do tema circunferência.

Quanto ao programa da disciplina, os autores reconhecem a necessidade de se repensar a estruturação do sistema de conteúdos tendo em conta a correspondência entre as condições prévias necessárias para o tratamento da nova matéria à luz de uma "metodologia ativa[4]" que permita os estudantes a discutirem as suas ideias na demonstração de determinadas proposições e teoremas sob a mediação do professor; estabelecer uma correspondência entre os conteúdos e o sistema de habilidades a desenvolver nos estudantes. Outrossim, é necessário melhorar as sugestões metodológicas com vista a orientar metodologicamente o professor.

No que diz respeito ao manual do aluno, o conteúdo da circunfência transportado nele, está limitado em apresentar o seu conceito e associa a expressão matemática utilizada para a determinação da distância entre dois pontos com o procedimento algébrico para a determinação da equação reduzida da circunferência sem uma explicação detalhada, tal como se constata na imagem que se segue.

[4] Segundo Cotta et al. (2012, p. 788) citados por Moreira e Ribeiro (2016, p. 95), as metodologias ativas de ensino e aprendizagem se baseiam em "estratégias de ensino fundamentadas na concepção pedagógica crítico reflexiva, que permitem uma leitura e intervenção sobre a realidade, favorecendo a interação entre os diversos atores e valorizando a construção coletiva do conhecimento e seus diferentes saberes e cenários de aprendizagem".



Capítulo 4

A circunferência

Definição:

Consideremos um ponto C do plano α e um número real $r > 0$.

Circunferência de centro C e raio r é o lugar geométrico dos pontos de α que distam r do ponto C.

λ → circunferência
C(a, b) → centro da circunferência λ
r → raio de λ
P(x, y) → ponto de λ

$\boxed{P \in \lambda \longleftrightarrow d_{PC} = r}$

$\left.\begin{array}{l} P(x, y) \\ C(a, b) \end{array}\right\} \rightarrow d_{PC} = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$

Pela definição, temos:

Figura 4: Imagem do conteúdo da circunferência no manual didático

Fonte: Própria

A constatação anterior é reforçada pela forma como se trabalham estes conteúdos em sala de aulas, partindo da definição, fórmula e exemplos, tal como se observa na imagem que se segue do caderno de um dos alunos do primeiro ano do curso de Matemática da referida escola.

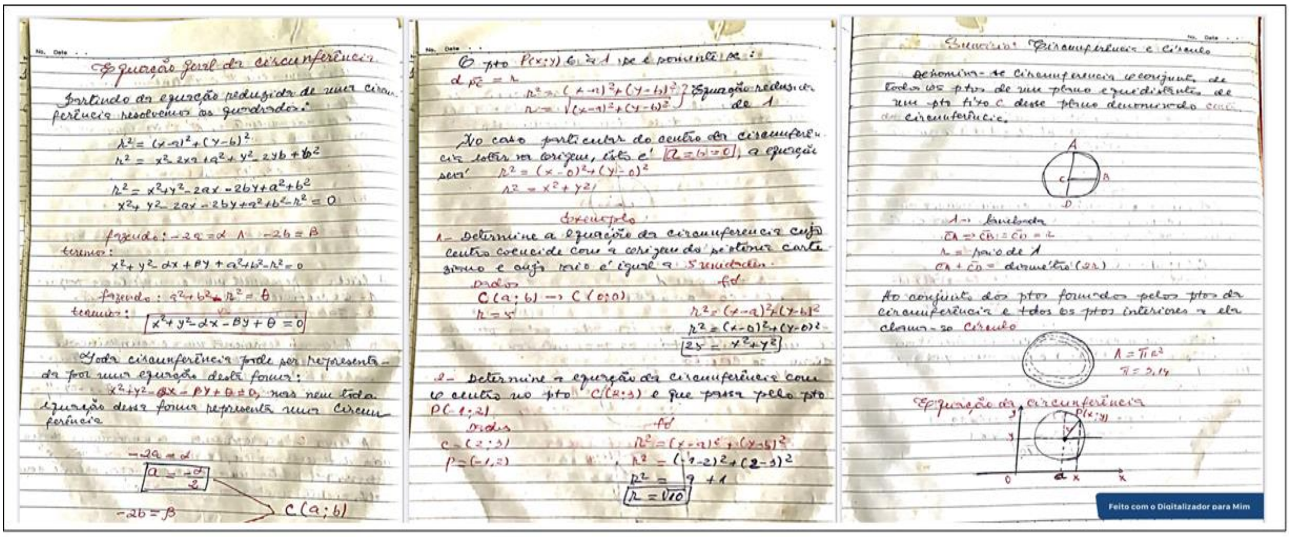


Figura 5: Anotações feitas pelo estudante no seu caderno
Fonte: Própria

Os resultados obtidos confirmam as insuficiências detectadas durante a apresentação oral do primeiro autor, ao longo da sua formação de mestrado, as quais motivaram os autores a realizarem esta investigação que apresenta um novo enfoque no tratamento deste conteúdo a partir da aplicação dos princípios axiomáticos de René Descartes e a utilização do raciocínio hipotético-dedutivo, conforme a abordagem abaixo.

Estudo da circunferência à luz dos princípios axiomáticos de René Descartes

No presente tópico faz-se uma abordagem relativa à circunferência na perspectiva do princípio lógico-dedutivo de René Descartes, o qual dá ênfase a um ensino que parte do mais simples para o mais complexo, demonstrando os resultados na base de teoremas e proposições adaptados a priori. Acreditamos que a contribuição prática deste estudo consiste no desenvolvimento de habilidades por parte dos estudantes e professores para estabelecerem um raciocínio do tipo "se....então", fazerem conjeturas envolvendo vários conhecimentos já adquiridos e confirmarem as suas veracidades a partir de um sistema lógico, usando definições, proposições, teoremas, entre outros.

O presente estudo segue as referências do livro "A Matemática do Ensino Médio, Volume 3, Capítulo I, secção 10, SBM, Coleção Professor de Matemática (2006)". Para tal, começa-se com a dedução da equação reduzida da circunferência e posteriormente a equação geral.

Dedução da equação reduzida da circunferência

Definição 1: *A circunferência de centro O e raio r maior que zero, é o lugar geométrico dos pontos do plano que estão a distância r de O* (Araújo 2012 p.37).

Em atenção a definição anterior, vamos deduzir a equação reduzida da circunferência a partir da Figura 6.

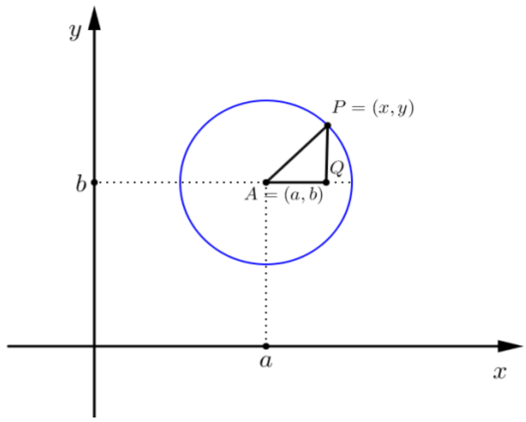


Figura 6: Circunferência (a)
Fonte: elaboração do autor pelo Geogebra

Como o triângulo $\triangle APQ$ é retângulo em Q podemos determinar a distância entre o centro A e o ponto P aplicando o teorema de Pitágoras.

$$d^2(A, P) = r^2 = (x - a)^2 + (y - b)^2 \Leftrightarrow$$

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

A equação obtida é a reduzida da circunferência e no caso particular em que o centro está na origem das coordenadas, a equação é: $x^2 + y^2 = r^2$.

Equação geral da circunferência

Para a obtenção da equação geral da circunferência, tem-se em consideração o teorema que se segue, cujo resultado identifica uma circunferência a partir de condições sobre os coeficientes de uma equação polinomial do 2º grau em duas variáveis.

Teorema 1: *Consideremos a equação* $Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$. *O conjunto dos pontos P = (x, y) cujas coordenadas satisfazem a equação é uma circunferência se, e somente se* $A = B \neq 0, C = 0$ *e* $D^2 + E^2 > 4AF$. (Lima et. al 2006 p.40)

Demonstração: evidencia-se que esta demonstração tem duas implicações, as quais são apresentadas separadamente:

- Primeira implicação:

Hipótese: se $A = B \neq 0, C = 0$ e $D^2 + E^2 > 4AF$;

Tese: A equação do tipo $Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$, define uma circunferência.

Como $A = B \neq 0, C = 0$ e $D^2 + E^2 > 4AF$, então vem:

$$Ax^2 + Ay^2 + 0.xy + Dx + Ey + F = 0 \Leftrightarrow$$

$$Ax^2 + Ay^2 + Dx + Ey + F = 0$$ **(Dividindo os dois membros por A)**

$$x^2 + y^2 + \frac{D}{A}x + \frac{E}{A}y + \frac{F}{A} = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + \frac{D}{A}x + \frac{E}{A}y = -\frac{F}{A}$$ **(completando quadrado), vem**:

$$x^2 + \frac{D}{2A} + \frac{D^2}{4A^2} + y^2 + \frac{E}{2A}y + \frac{E^2}{4A^2} = -\frac{F}{A} + \frac{D^2}{4A^2} + \frac{E^2}{4A^2}$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{D}{2A}\right)^2 + \left(y + \frac{E}{2A}\right)^2 = \frac{D^2 + E^2 - 4AF}{4A^2}$$

Nesta primeira implicação usa-se a desigualdade $D^2 + E^2 > 4AF$, para provar que na equação obtida, o valor do lado direito da igualdade é estritamente positivo e é o raio da circunferência de centro $C = (-\frac{D}{2A}, -\frac{E}{2A})$.

Logo a equação $Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$ é uma equação da circunferência.

- Segunda implicação:

Hipótese: Se uma circunferência é definida por uma equação

$Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0.$

Tese: $A = B \neq 0, C = 0$ e $D^2 + E^2 > 4AF$.

Suponhamos inicialmente que o centro da circunferência seja $O = (0,0)$, então os pontos de coordenadas $(-r, 0)$ e $(r, 0)$ pertencem a circunferência, pois a equação na origem das coordenadas é:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

se $y^2 = 0$, então $x = \pm r \Rightarrow (-r, 0)$ e $(r, 0)$.

Substituindo sucessivamente essas igualdades na equação

$$Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$$

temos:

1. $A(-r)^2 - Dr + F = 0$
2. $Ar^2 + Dr + F = 0.$

Igualando 1 e 2, temos:

$$Ar^2 - Dr + F = Ar^2 + Dr + F$$

$$-2rD = 0$$

$$D = 0$$

Se somarmos 1 e 2, temos:

$$2Ar^2 + 2F = 0$$

$$2(Ar^2 + F) = 0$$

$$A = -\frac{F}{r^2}$$

Queremos provar que $A \neq 0$, logo temos que provar que $F \neq 0$.

Supomos, com vista a um absurdo que $F = 0$, a equação

$$Ax^2 \ + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$$

Se reduz na forma

$$Ax^2 \ + By^2 + Cxy + Dx + Ey = 0$$

Logo o par $(0{,}0)$ é solução da equação da circunferência, o que é absurdo porque o par $(0{,}0)$ é o centro da circunferência, ou seja:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Ficaria:

$$0^2 + 0^2 = r^2$$

O que é absurdo, logo $F \neq 0$, dai segue-se $A \neq 0$, de modo análogo, levando em consideração que os pontos de coordenadas $(0, -r,)$ e $(0, r)$, também estão sobre a circunferência, concluímos que:

$$E = 0 \text{ e } B = -\frac{F}{r^2}$$

Portanto $A = B \neq 0,\ D = E = Z0$ e a equação

$$Ax^2 \ + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$$

se reduz a:

$$Ax^2 + Ay^2 + Cxy + F = 0$$

Como o centro da circunferência é a origem $0 \ = (0, 0),$ as coordenadas (x, y) de todos os seus pontos cumprem a relação $x^2 \ + y^2 = r^2$, logo a equação acima pode ser escrita da seguinte forma:

$$A(x^2 + y^2) + Cxy + F = 0$$

$$Ar^2 + Cxy + F = 0$$

Se $C \neq 0$ dai teríamos: $xy = -\frac{(F+Ar^2)}{C}$ e o produto xy das coordenadas de um ponto qualquer na circunferência seria constante, o que não é verdade.

Queremos provar que $C = 0$.

Supomos com vista a um absurdo que $C \neq 0$, então viria:

$$xy = \frac{-(F + Ar^2)}{C}$$

Da igualdade anterior, consideremos dois pontos distintos da circunferência, por um lado o ponto $(r, 0)$ e por outro um ponto de interseção com a bissetriz dos quadrantes ímpares.

- Para o ponto $(r, 0)$, a constante seria:

$$\frac{-(F + Ar^2)}{C} = 0$$

- Considerando o ponto de interseção da bissetriz $y = x$ com a circunferência de equação $x^2 + y^2 = r^2$, segue-se:

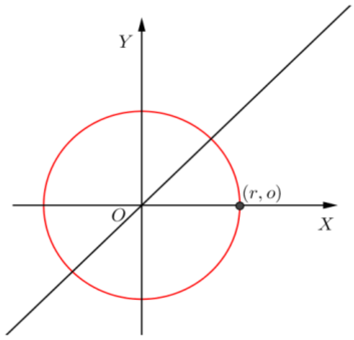


Figura 7: Intersecção da bissectriz dos quadrantes ímpares com a circunferência
Fonte: Elaboração dos autores pelo Geogebra

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = r^2 \\ y = x \end{cases}$$

Daí, vem:

$$x^2 + x^2 = r^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 = r^2 \Leftrightarrow$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{r^2}{2}} \Leftrightarrow x = \pm\frac{r\sqrt{2}}{2}$$

Como $y = x$, segue-se:

$$\left(\frac{r\sqrt{2}}{2}, \frac{r\sqrt{2}}{2}\right); \left(\frac{-r\sqrt{2}}{2}, \frac{-r\sqrt{2}}{2}\right)$$

Substituindo um dos pontos na igualdade

$$xy = \frac{-(F + Ar^2)}{C}$$

Por exemplo, $\left(\frac{r\sqrt{2}}{2}, \frac{r\sqrt{2}}{2}\right)$, teríamos:

$$\frac{r\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{r\sqrt{2}}{2} = \frac{-(F + r^2)}{C} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{r^2}{2} = \frac{-(F + r^2)}{C}$$

Resultaria então:

$$\frac{r^2}{2} = 0$$

O que é absurdo porque $r \neq 0$, (exclui-se a possibilidade de uma circunferência degenerada) logo $C = 0$. (c.q.d.)[5]

Então a equação se reduz na forma $Ax^2 + Ay^2 + F = 0$.

Torna-se necessário generalizar a abordagem anterior para o caso em que o centro da circunferência C é um ponto arbitrário $P = (a, b)$ e raio r, ou seja, satisfaz a equação

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

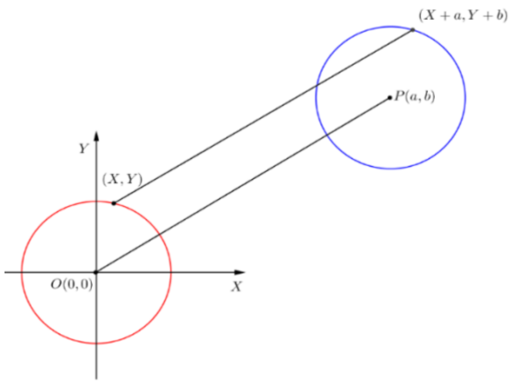


Figura 8: Circunferência transladada
Fonte: Própria através do Geogebra

Consideremos a mudança de coordenadas, vem:

$$\begin{cases} X = x - a \\ Y = y - b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = X + a \\ y = Y + b \end{cases}$$

[5] c.q.d significa como queríamos demonstrar.

Que satisfazem a seguinte equação:

$$X^2 + Y^2 = r^2$$

Então a equação

$$Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$$

É equivalente a equação

$$A(X + a)^2 + B(Y + b)^2 + C(X + a)(Y + b) + D(Y + a) + E(Y + b) + F = 0 \ (1)$$

Para o ponto $P = (X, Y)$ a circunferência fica centrada na origem e a sua forma geral fica:

$$AX^2 + BY^2 + CXY + (D')X + (E')Y + F' = 0$$

Com a equação na origem, sabe-se que:

$C = 0,\ D' = 0,\ E' = 0,$

Logo a equação se reduz na seguinte forma:

$$A(X^2 + Y^2) + F' = 0$$

E consequentemente,

$$A = \frac{-F'}{r^2} \text{ e } F' = -A(r^2)$$

Desenvolvendo (1), sabendo que $A = B$ tornam-se válidas as seguintes igualdades:

$$1^{\underline{a}}\ F' = Aa^2 + Ab^2 + Da + Eb + F$$

$$F = F' - Aa^2 - Bb^2 - Da - Eb$$

$$2^{\underline{a}}\ D' = 2Aa + D = 0 \Rightarrow D = -2Aa$$

$$3^{\underline{a}}\ E' = 2Ab + E = 0 \Rightarrow E = -2Ab$$

Na sequência da mesma abordagem, queremos provar que $D^2 + E^2 > 4AF$.

Tendo em conta as igualdades anteriores, temos:

$$D^2 + E^2 = (-2Aa)^2 + (-2Ab)^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow D^2 + E^2 = 4A^2(a^2 + b^2)$$

E por sua vez,

$$4AF = 4A[F' - A(a^2 + b^2) - Da - Eb] \Leftrightarrow$$
$$4AF = 4A[-A(X^2 + Y^2) - A(a^2 + b^2) - (-2Aa)a - (-2Bb)b] \Leftrightarrow$$

$$4AF = 4A[-A(X^2+Y^2) - A(a^2+b^2) + 2Aa^2 + 2Ab^2] \Leftrightarrow$$
$$4AF = 4A^2[-(X^2+Y^2) - (a^2+b^2) + 2a^2 + 2b^2] \Leftrightarrow$$
$$4AF = 4A^2[-(X^2+Y^2) - (a^2+b^2) + 2(a^2+b^2)] \Leftrightarrow$$
$$4AF = 4A^2[-X^2 - Y^2 - (a^2+b^2) + 2(a^2+b^2)] \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow D^2 + E^2 - 4AF = 4A^2(a^2+b^2) - 4A^2[-X^2 - Y^2 - (a^2+b^2) + 2(a^2+b^2)]$$
$$\Leftrightarrow D^2 + E^2 - 4AF = 4A^2(a^2+b^2) + 4A^2(X^2+Y^2) + 4A^2(a^2+b^2) - 8A^2(a^2+b^2)$$
$$\Leftrightarrow D^2 + E^2 - 4AF = 4A^2(X^2+Y^2) + 8A^2(a^2+b^2) - 8A^2(a^2+b^2)$$
$$\Leftrightarrow D^2 + E^2 - 4AF = 4A^2(X^2+Y^2) > 0$$

Como queríamos demonstrar.

O resultado obtido confirma a veracidade da segunda implicação, logo a equação polinomial do segundo grau em duas variáveis $Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$.

É a equação geral de uma circunferência para $A = B \neq 0, C = 0$ e $D^2 + E^2 > 4AF$.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este artigo é resultado de uma pesquisa cujo objetivo é contribuir para o melhoramento do ensino da Geometria Analítica com particular realce ao tema circunferência, no curso e escola em causa, para tal seguiram-se as recomendações feitas pelo corpo de júri no âmbito do diagnóstico mencionado, as quais permitiram consultar alguns livros que por sua vez ajudaram a obter a sustentabilidade teórico-prática do referido estudo. As demonstrações feitas conducentes à obtenção das equações da circunferência através de um encadeamento lógico, previamente estabelecido ajudarão os alunos a mitigarem as dificuldades relacionadas com a equação reduzida e geral da circunferência; a principal propriedade que justifica a razão dela ser considerada como um lugar geométrico, bem como a identificação da circunferência a partir de condições sobre os coeficientes de uma equação polinomial do 2º grau em duas variáveis. O presente estudo servirá de material de consulta para os professores da cadeira de Geometria Analítica, do curso de Matemática primeiro ano da Escola Superior Pedagógica do Bié e não só para sedimentarem o rigor científico nas aulas que abordam o tema circunferência, evitando, deste modo, a exposição de fórmulas dadas de forma “pronta e acabada” e algumas transições bruscas entre conteúdos de graus de dificuldade distintos.

REFERÊNCIAS

Araújo, P. V. (2012). *Curso de Geometria.* Lisboa: Editora Gradiva.

Assembleia Nacional de Angola. (2016). *Nova lei de base n.º 17/16 de 7 de outubro, (2016)*. Luanda, Angola.

Biondo, C. A. (2017). *O Ensino da Matemática no primeiro ciclo do Ensino Básico:* A apropriação do sistema de numeração decimal – estudo de caso. (Dissertação de Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática). Universidade do Porto, Porto.

Boyer, U. C. (2011). *A History of Mathematics.* Canada: Second edition, John Wiley & Sons.

Cassela, E. A. D. (2018). *Ensino da Geometria Analítica no contexto cultural do Cuito/Bié*. (Dissertação de Mestrado em Matemática para professores). Universidade da Beira Interior, Covilhã, Portugal.

Kline, M. (1967). *Mathematics for Nonmathematician.* New York: Dover Publications Inc.

Lima, E. L. et al. (2006). *A Matemática do Ensino Médio* (Vol. 3. Capítulo 1-Geometria Analítica Plana). Brasil: Sociedade Brasileira de Matemática.

Moreira, J.R. & Ribeiro, J. B. P. (2016). Prática pedagógica baseada em Metodologia ativa: Aprendizagem sob a perspectiva do letramento informacional para o ensino na educação profissional. Períodico científico outras palavras. Recuperado de http://revista.faculdadeprojecao.edu.br/index.php/Projecao5/article/view/722

Moreira, M.A. & Masini, E. S. (2001). *Aprendizagem significativa:* a teoria de David Ausbel. São Paulo: Centauro.

Moreira, M.A. (2003). *Pesquisa em ensino*: aspetos metodológicos. In. Instituto de Física – UFRGS Burgos. Universidade de Burgos. Recuperado de http://www.if.ufrgs.br/~moreira/pesquisaensino.pdf. Acesso em: 26/08/2020.

Pickover, C. A. (2009). *O livro da Matemática*. New York: NY 10016, VS.

Quitembo A. D. J. (2020). Ambientes de aprendizagens versus aprendizagem significativa. Uma análise de práticas desenvolvidas na formação de professores de Matemática em Benguela-Angola. *Revista Eletrônica de Educação Matemática*. Doi: 10.5007/1981-1322. 2020 e 73871

NOTAS

TÍTULO DA OBRA
Estudo da circunferência à luz dos princípios axiomáticos de René Descartes. Um olhar ao contexto de ensino-aprendizagem da escola superior pedagógica do bié

Ezequias Adolfo Cassela
Mestre em Matemática para professores
Escola Superior Pedagógica do Bié, Departamento de ciências Exactas, sector de Matemática, Cuito-Bié, Angola
ezequiasadolfo@hotmail.com
https://orcid.org/0000-0001-7703-0097

Rosa Maria de Nascimento
Doutora em Ciências Pedagógicas na especialidade do Ensino da Estatística (UCPJV Havana-Cuba) Professora do Curso de Licenciatura em Matemática e em Física da Escola Superior Pedagógica do Bié (ESPB), Cuito/Bié-Angola
Nascimento22@hotmail.com
https://orcid.org/0000-0001-7836-7441

Endereço de correspondência do principal autor
Centralidade Horizonte do Cuito, Quadra 31, prédio 9, apt. 2.2., Angola.

AGRADECIMENTOS
A Deus pai todo poderoso pelas imensuráveis bençōes, a Direção da Escola Superior Pedagógica do Bié, na pessoa do Diretor Geral, PhD. Alfredo Maria de Jesus Paulo, a PhD. Rosa Maria de Nascimento pelo apoio e contributo.

CONTRIBUIÇÃO DE AUTORIA
Concepção e elaboração do manuscrito: E. A. D. Cassela, R. M. De Nascimento
Coleta de dados: E. A. D. Cassela
Análise de dados: E. A. D. Cassela, R. M. De Nascimento
Revisão bibliográfica: E. A. D. Cassela, R. M. De Nascimento
Revisão e aprovação: R. M. De Nascimento

CONJUNTO DE DADOS DE PESQUISA
O conjunto de dados que dá suporte aos resultados deste estudo não está disponível publicamente.

FINANCIAMENTO
Não se aplica.

CONSENTIMENTO DE USO DE IMAGEM
Não se aplica.

APROVAÇÃO DE COMITÊ DE ÉTICA EM PESQUISA
Não se aplica.

CONFLITO DE INTERESSES
Não se aplica.

PUBLISHER – uso exclusivo da revista
Universidade Federal de Santa Catarina. Grupo de Pesquisa em Epistemologia e Ensino de Matemática (GPEEM). Publicação no Portal de Periódicos UFSC. As ideias expressadas neste artigo são de responsabilidade de seus autores, não representando, necessariamente, a opinião dos editores ou da universidade.

EDITOR – uso exclusivo da revista
Méricles Thadeu Moretti e Rosilene Beatriz Machado.

HISTÓRICO – uso exclusivo da revista
Recebido em: 26-08-2020 – Aprovado em: 25-09-2020