

IV Congreso Internacional de Investigación y Práctica Profesional en Psicología  
XIX Jornadas de Investigación VIII Encuentro de Investigadores en Psicología  
del MERCOSUR. Facultad de Psicología - Universidad de Buenos Aires, Buenos  
Aires, 2012.

# Errores que emergen durante el aprendizaje de la operación de sustracción.

Formoso, Jesica y Jacobovich, Silvia.

Cita:

Formoso, Jesica y Jacobovich, Silvia (2012). *Errores que emergen durante el aprendizaje de la operación de sustracción*. IV Congreso Internacional de Investigación y Práctica Profesional en Psicología XIX Jornadas de Investigación VIII Encuentro de Investigadores en Psicología del MERCOSUR. Facultad de Psicología - Universidad de Buenos Aires, Buenos Aires.

Dirección estable: <https://www.aacademica.org/000-072/177>

ARK: <https://n2t.net/ark:/13683/emcu/ZZ2>

*Acta Académica es un proyecto académico sin fines de lucro enmarcado en la iniciativa de acceso abierto. Acta Académica fue creado para facilitar a investigadores de todo el mundo el compartir su producción académica. Para crear un perfil gratuitamente o acceder a otros trabajos visite: <https://www.aacademica.org>.*

# ERRORES QUE EMERGEN DURANTE EL APRENDIZAJE DE LA OPERACIÓN DE SUSTRACCIÓN

Formoso, Jesica - Jacobovich, Silvia

Facultad de Psicología - Universidad de Buenos Aires

---

## Resumen

La operación de sustracción implica dos tipos de conocimiento: uno declarativo que refiere a los conceptos matemáticos y otro procedural, que alude a los algoritmos y estrategias necesarias para su resolución.

En la actualidad se destacan dos corrientes de investigación al respecto: a) La línea conceptual, que destaca la importancia de la adquisición de los componentes conceptuales que gobiernan el aprendizaje de los procedimientos del algoritmo. b) La perspectiva sintáctica, que centra su análisis en torno de los mecanismos procedimentales y surge de la Teoría de Reparación de VanLehn (Brown, J. S., & VanLehn, K., 1980). Para este último, los errores sistemáticos que emergen durante el aprendizaje de la operación son el resultado de “reparaciones”, el intento infructuoso de extender las reglas existentes y aplicarlas a nuevas situaciones. Realizamos un estudio con diez sujetos en edad escolar cuyas puntuaciones en test estandarizados de procesamiento numérico y cálculo fueron adecuadas para su edad y nivel escolar, con el objetivo de tomar nota de los procedimientos utilizados para resolver operaciones de sustracción y analizar el tipo de dificultades emergentes. Interpretamos los aciertos y errores de las producciones a la luz de los planteos teóricos actuales sobre el tema.

## Palabras Clave

aprendizaje aritmética sustracción

## Abstract

ERRORS THAT ARISE DURING THE LEARNING OF THE SUBTRCTION OPERATION

The operation of subtraction involves two types of knowledge. The declarative knowledge refers to the mathematical concepts and the procedural refers to the algorithms and strategies necessary for its resolution.

There are two lines of research in this regard: a) The conceptual line emphasizes the importance of the acquisition of the conceptual components that govern the learning of the algorithm's procedures b) The syntactic perspective focuses its analysis on procedural mechanisms and emerges from VanLehn's Repair Theory (Brown, J. S., & VanLehn, K., 1980).

This author considers that the systematic errors that arise during the learning of the operation are the result of “repairs”, the unsuccessful attempt to extend the existing rules applying them to novel situations.

We conducted a study with ten subjects in school age whose scores on standardized tests of number processing and calculation were appropriate for their age and grade level. The objective was to find out which procedures are used to solve subtraction operations and analyze the type of difficulties emerging. We analyzed the rights and wrongs of the productions in the light of current theoretical proposals on the subject.

## Key Words

Learning Arithmetic Subtraction

## Introducción

La competencia matemática implica un proceso de construcción lento y gradual, cimentado en las actividades concretas y manipulativas con objetos, cuyo desarrollo permite arribar posteriormente a niveles más abstractos y generales.

El aprendizaje de la utilización de números y cálculos, tanto en su vertiente formal como informal, es un tema de interés para investigadores del desarrollo de la función en sí misma y para todo el ámbito de la docencia.

Nuestro interés se centra en el estudio de los errores que emergen durante el proceso de aprendizaje del algoritmo de sustracción, particularmente en operaciones multidígito.

Consideramos que el análisis de las producciones erróneas permite acceder a las conceptualizaciones que el niño genera en relación a la operación en sí y a los procedimientos que ésta implica.

Comprender la naturaleza de los errores supone un acercamiento a la posibilidad de concebir estrategias alternativas para la enseñanza del algoritmo.

Al igual que otras habilidades matemáticas, la operación de sustracción implica dos tipos de conocimiento, uno declarativo que refiere al qué de los conceptos matemáticos y otro el procedimental, que alude al cómo, es decir a los algoritmos y estrategias de resolución. Nos encontramos así con dos líneas de investigación que destacan elementos diferentes:

A) La línea conceptual, que destaca la importancia de la adquisición de los componentes conceptuales que gobiernan el aprendizaje de los procedimientos del algoritmo (Baroody, 2003; Fuson, 1998). En este contexto Fuson (1998) plantea un modelo que incluye las estructuras conceptuales necesarias para el dominio de los numerales multidígito. Las redes de soporte conceptual que este autor describe establecen relaciones entre palabras del mundo real, códigos notacionales y referentes, donde el desarrollo de

corporalizaciones (manipulación con objetos reales) facilita la construcción de significados para palabras-número y numerales arábigos. Se trataría de instrumentos perceptivos que establezcan una relación comprensiva con los conceptos que se están aprehendiendo, Fuson lo llama “lograr operaciones significativas”, que implica comprender qué operación se está realizando y por qué se llevan a cabo determinados pasos (Dansilio, 2008). Esta línea también está relacionada con otras investigaciones que han centrado sus estudios en las estructuras semánticas de los problemas que se resuelven mediante operaciones algorítmicas, y la influencia de este componente semántico en el proceso de solución de los mismos (Carpenter y Moser, 1982, 1983); (Nesher, 1976, 1982 a, b); (Nesher y Katriel, 1977); (Nesher y Hershkovitz, 1994).

B) La perspectiva sintáctica, que centra su análisis en torno a los mecanismos procesales o procedimentales (Resnick, 1982) Esta vertiente sintáctica está ligada a la teoría de VanLehn (VanLehn, 1990), que aborda la posible sistematicidad de los errores que los niños producen durante el aprendizaje de resolución de algoritmos básicos. Para este autor, dicha sistematicidad implicaría una lógica subyacente, una alteración constante del procedimiento o de uno de sus elementos, que podría o no suponer una mala comprensión de la operación en sí, lo que indujo a estudiar las estrategias individuales que cada niño utiliza para la resolución del algoritmo. Así desde la informática se toma el término Bug algorítmico para referir a errores sistemáticos desde los que puede determinarse la existencia de un procedimiento específico que produce las respuestas erróneas. Se trata de variaciones mínimas del procedimiento correcto, definidas con precisión, de modo tal que implica la ejecución correcta de un procedimiento incorrecto (VanLehn, 1990), este concepto de error “intencional” o bug (a diferencia de un error azaroso) implicaría que al conocer el mecanismo particular de su producción se podría predecir la respuesta errónea con exactitud. Su existencia reflejaría una creencia o concepto erróneo acerca del procedimiento o de la operación. La investigación realizada por Brown y Burton (1978) con el sistema informatizado “Buggy”, constituye un referente esencial en la literatura científica sobre la cuestión. Dicho sistema consiste en un simulador de aprendizaje que intenta identificar y tratar los distintos bugs o errores producidos en el algoritmo de la resta, errores que se basan a su vez en un modelo mental en base a las ciencias cognitivas. Las investigaciones de VanLehn extienden este concepto de Buggy, y abarcan el análisis de cómo se generan los errores (Brown y VanLehn, 1980). Para este autor, los bugs son el resultado infructuoso del intento de extensión de las reglas existentes, y su aplicación a nuevas situaciones. Estas acciones conforman lo que él denomina “reparaciones”. Las reparaciones pueden programarse y predecirse por la teoría del callejón sin salida, que es aplicada para el pronóstico de la aparición de bugs en los estudiantes que intentan hallar solución a restas multicolumna. (Young y O’Shea, 1981); (Ohlson, y Langley 1988).

Al interior de este debate tiene sentido preguntarse si es posible hablar de conocimientos dissociables o si bien tanto el manejo del conocimiento procedural, como el conceptual o declarativo, son condiciones necesarias para la resolución de la operación y la generalización de la misma a diferentes contextos. Cada uno de estos aspectos podría a su vez utilizarse para el monitoreo y control del otro, llevando al sujeto a la resolución correcta del algoritmo. En el presente trabajo nos proponemos aportar datos de nuestra población a dicho debate.

## **Objeto**

Análisis de la producción de errores durante el aprendizaje del algoritmo de la sustracción en niños en edad escolar de la Ciudad Autónoma de Buenos Aires.

## **Método**

Tipo de estudio: Exploratorio – Descriptivo

Muestra: Entrevista a niños (n=10) de 8 años de edad, de ambos sexos, alumnos de 3er. Grado de una escuela privada de nivel socio-económico medio de la Ciudad Autónoma Buenos Aires.

Criterios de selección:

·Rendimiento escolar adecuado para los criterios de la institución escolar.

·Rendimiento dentro de la media ante el Test de Evaluación del procesamiento del Número y Cálculo -PRO-CÁLCULO- (Feld, Taussik, Azaretto. Paidós, Bs. As, 2006)

Instrumento: Protocolo de restas de VanLehn (Cambridge, MA: MIT Press, 1990)

conformado por 20 restas multidígito.

Procedimiento:

·Administración del Test Pro-Cálculo y selección de la muestra: 10 sujetos.

·Administración del protocolo de restas de VanLehn (Cambridge, MA: MIT Press, 1990) conformado por 20 restas multidígito a los 10 sujetos que conforman la muestra.

·Análisis de los aciertos y errores producidos por los participantes en la resolución de las sustracciones. Clasificación de errores.

Resultados

Los resultados de la resolución de las 200 restas (20 operaciones por participante) mostraron un 36 % de error. Este porcentaje es mayor al hallado por Young y O’Shea (1981) en un estudio similar, en el que solo el 22% de las operaciones fueron erróneas.

Los errores fueron agrupados en 5 categorías:

I.Errores de copia (2,74%): Aquellos que se producen al pasar la ecuación de la posición horizontal a la vertical y copiar inadecuadamente alguno de los dígitos. Se trata de un error aleatorio.

II.Error en sustracciones parciales (19,2%): Afecta en todos los casos a operaciones parciales cuyos minuendos superan la decena. Ej.: 15-7=7.

III.Encolumnamiento (1,37%) Imprecisión en la ubicación espacial de las columnas, que afecta a la resolución correcta de la operación.

IV.No utilización del recurso de “tomar prestado” cuando

corresponde hacerlo (45,21%): cuando el dígito de una columna del minuendo es menor al del sustraendo de la misma columna, el niño no utiliza el procedimiento adecuado de “pedir prestado”, sino un procedimiento alternativo que resulta inadecuado. Ejemplo: Intercambiar el número del minuendo con el del sustraendo, invirtiendo el orden vertical top-down de la operación.

V.Mecanismo incorrecto del recurso de “tomar prestado” (31,51%). Ejemplo: si la columna inmediata izquierda contiene el numeral cero, recurre a la siguiente hacia la izquierda, saltando la misma.

Para este análisis tomamos cada error como objeto en sí mismo, no cada operación, por lo que cada resta pudo presentar más de un error. En los casos en los que los procedimientos no resultaron claros para el examinador, éste pidió al niño las aclaraciones necesarias para lograr su comprensión.

Nos centraremos en las respuestas de las categorías IV y V que, juntas, alcanzan el 76,72% del total de los errores producidos.

Los errores dentro de la categoría IV incluyen diferentes tipos de resolución propuestas por los sujetos cuando la estrategia adecuada implica el “pedir prestado” a la columna situada a la izquierda, y éstos desconocen la misma o no hacen uso de ella:

- Inversión por valor (Smaller from larger\*): Al dígito mayor siempre se le sustrae el menor, más allá de su posición como minuendo o sustraendo.

- Suma en lugar de resta (Add instead of sub\*): Cuando un número del minuendo es menor que el del sustraendo ubicado en la misma columna, éstos se suman en lugar de restarse.

-  $0-N=0$  (Diff/ $0-N=0^*$ ): Si en una columna el número del minuendo es 0, y el del sustraendo no, el resultado parcial se considera y anota erróneamente como 0.

-  $0-N=N$  (Diff/ $0-N=N^*$ ): Si en una columna el número del minuendo es 0, y el del

sustraendo no, el resultado parcial se considera y anota erróneamente igual al sustraendo.

-  $N-0=0$  (Diff/ $N-0=0^*$ ): Si en una columna el número del sustraendo es 0, y el del minuendo no, el resultado parcial se considera y anota erróneamente como 0.

Los errores dentro de la categoría V incluyen diferentes tipos de resolución propuestas por los sujetos cuando la estrategia adecuada implica el “pedir prestado” a la columna situada a la izquierda, y éstos lo realizan de un modo incorrecto:

- Salteo del cero (Borrow across  $0^*$ ): Si en la columna próxima a la izquierda (a la

cual se le debe “pedir prestado”) se encuentra el numeral 0 ésta se saltea y se pide prestado a la siguiente hacia la izquierda.

- Error de pasaje de cantidad: Al pedir prestado a la decena, considera unidad al préstamo y no decena.

- Toma prestado, no disminuye (borrow no decrement\*): se toma prestado un hacia la izquierda, pero el prestador no disminuye.

- Tomar de 1 lo convierte en 10 (Borrow from 1 is  $10^*$ ): Si en la columna a la que se pide prestado se halla el numeral 1, éste se “convierte” en 10

- Tomar de 1 lo convierte en 9 (Borrow from 1 is  $9^*$ ) Si en la columna a la que se pide prestado se halla el numeral 1, éste se “convierte” en 9

- No tomar prestado en múltiples ceros (Stop borrow at multiple  $0s^*$ ): Cuando el minuendo posee multiples ceros (Ej. 8007) y el último dígito es menor que el del sustraendo, el sujeto suma una decena sin disminuir dígito alguno.

- Tomar prestado en un cero (Borrow from zero/borrow/Add/Decrement instead  $0^*$ ): Se toma prestado de un cero y se lo convierte en un 1 o un 9.

\* (Categorías de VanLehn)

### Discusión:

Los errores correspondientes a las categorías I y II, errores de copia y de sustracciones parciales, parecen ser eventuales. En los datos recogidos se aprecia que la mayor cantidad de errores corresponden a las categorías IV y V. Observamos que el procedimiento de tomar prestado, cuando debiera ser utilizado pero no se lo lleva a cabo, o se lo hace de modo incorrecto, emerge siempre que los elementos de la operación presentan ciertas dificultades que el niño no puede resolver, y constituye un error de tipo sistemático. Con este término nos referimos a que puede explicarse por dificultades en la comprensión procedimental de la operación de sustracción, o “bug”, tal como los plantean Resnick (1982) y VanLehn (1990). Los errores observados en las categorías IV y V son consistentes con las categorías de error descritas por estos autores. Estos errores responden a la generación de una alternativa factible para la resolución de una operación cuando se desconoce el procedimiento adecuado.

### Conclusiones:

Los errores de encolumnamiento generan una dificultad al momento de resolver la operación, pero no parecen afectar en todos los casos de la misma manera. El modo en que el participante ubica los elementos parece ser azaroso y no responde a una lógica subyacente incorrecta, sino al desconocimiento de que la ubicación del elemento en una columna otorga un valor particular a dicho elemento, en tanto lo señala como unidad, decena, centena. Es factible considerar que, en estos casos, se encuentra alterado o ausente el aspecto conceptual de este procedimiento.

Nos preguntamos, por otro lado, si la aplicación de procedimientos alternativos en situaciones problemáticas, implica o no una conceptualización defectuosa de cada procedimiento alterado.

Hay un sentido general para la operación de la resta en tanto implica la sustracción de una cantidad de elementos de un conjunto. El minuendo representa la totalidad del conjunto y la diferencia el resultado de la operación que, necesariamente, debe ser menor

a la cifra inicial. En el 20% de las operaciones, los procedimientos erróneos llevan a un resultado cuya cifra es mayor que la del minuendo, con lo que podemos concluir que el niño no cuenta con, o perdió de vista, el objetivo de la operación en sí, su sentido. Por otro lado, hay casos en los que, si bien hay errores procedimentales que llevan a un resultado erróneo, el sentido general del tipo de operación se mantiene y se utiliza incluso como referencia para chequear el resultado. El niño controla que el resultado sea menor que la cifra inicial.

El presente estudio piloto muestra resultados que permiten suponer que los errores, en su mayoría, son el producto de fallas en la comprensión del aspecto conceptual de los diferentes procedimientos implicados en la operación de sustracción.

Nos planteamos la ampliación del presente estudio para explorar con mayor profundidad la posible existencia de una disociación entre los dos tipos de conocimiento, y confirmar o no la presencia de un patrón de error relacionado con la tendencia del presente trabajo y la posibilidad de pensar nuevos abordajes educativos que colaboren en la enseñanza de la sustracción.

## **Bibliografía**

- Baroody, A. (2003). The Development of Adaptive Expertise and Flexibility: The Integration of conceptual and Procedural Knowledge, en Baroody, A. J., Dowker, A. (eds.), *The Development of Arithmetic Concepts and Skills. Constructing Adaptive Expertise*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.
- Brown, J. y Burton, R. (1978). Diagnostic models for procedural bugs in Basic mathematical skills. *Cognitive Science*, 2, pp. 155-192.
- Brown, J. S., & VanLehn, K. (1980). Repair theory: A generative theory of bugs in procedural skills. *Cognitive Science*, 4, 379-426.
- Carpenter, T. P. & Moser, J. M. (1982). The development of addition and subtraction problem-solving skills. In T. P. Carpenter, J. M. Moser & J. M. Romberg (Comps.), *Addition and subtraction: A cognitive perspective* (pp. 9-24). Hillsdale, NJ: Erlbaum.
- Carpenter, T. P. & Moser, J. M. (1983). The acquisition of addition and subtraction concepts. In R. Lesh & M. Landau (Comps.), *Acquisition of Mathematics: Concepts and Processes*. Nueva York: Academic Press.
- Dansilio, S. (2008). *Los trastornos del cálculo y el procesamiento del número*. Montevideo: Prensa Médica Latinoamericana.
- Feld, V., Taussik, I. y Azaretto, C. (2006). *PRO – CÁLCULO. Test para la evaluación del procesamiento del número y el cálculo en niños*. Buenos Aires. Ed. Paidós.
- Fuson, KC. (1998). Pedagogical, mathematical, and real-world conceptual support nets: A model for building children's multidigit domain knowledge. *Mathematical Cognition*, 4: 147 – 186.
- Moser, J & Romberg, T. (Comps.), *Addition and subtraction: A cognitive perspective*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Assoc.
- Nesher, P. (1976). The three determinants of difficulty in verbal arithmetic problems. *Educational Studies in mathematics*, 7, 369-388.
- Nesher, P. & Katriel, T. (1977). A semantic analysis of addition and subtraction word problems in arithmetic. *Educational Studies in Mathematics* (8), 251-269.
- Nesher, P., Greeno, J. G. & Riley, M. S. (1982). The development o semantic categories for addition and subtraction. *Educational Studies in Mathematics*, 13 (4), 373-394.
- Nesher, P. & Hershkovitz, S. (1994). The role of schemes in two-step problem: Analysis and Research findings. *Educational Studies in mathematics*, 26, 1-23.
- Ohlsson, S. & Langley, P. (1988). Psychological evaluation of path hypotheses

- in intelligent tutoring system (pp. 42-62). New York: Springer-Verlag.
- Resnick, L. (1982). Syntax and semantics in learning to subtract. In T. Carpenter,
- VanLehn, K. (1990). *Mind bugs: origins of procedural misconceptions*. Cambridge, Mass: MIT Press.
- Young, R.; O'Shea, T. (1981). Errors in children's subtraction. *Cognitive Science*, 5, pp. 153-177.