MODELO MATEMATICO DE COVID-19 EN EL ESTADO DE MICHOACAN, MEXICO, MEDIANTE EL USO DE LA ECUACIÓN DE PIERRE VERHULST. - MODELO MATEMATICO DE COVID-19 EN EL ESTADO DE MICHOACAN, MEXICO, MEDIANTE EL USO DE LA ECUACIÓN DE PIERRE VERHULST.

Campos De La Cruz, Antonio y Lopez Florentino,Itzel.

MODELO MATEMATICO DE COVID-19 EN EL ESTADO DE MICHOACAN, MEXICO, MEDIANTE EL USO DE LA ECUACION DE PIERRE VERHULST.

[1]Antonio Campos De La Cruz.

[1]Profesor de Matemáticas.- CEMSAD 33.

[2]Itzel López Florentino.

[2]Estudiante de Ingeniería en Administración. Tecnológico Nacional de México. Instituto Tecnológico Superior de Pátzcuaro.

RESUMEN— En el presente proyecto se mostrará el comportamiento matemático de contagios de COVID-19 en el estado de Michoacán, México (21/03/2020 al 20/08/2020) comenzando con el día en que se presentó el primer caso. La realización del modelo fue mediante la ecuación logística de Pierre Verhulst, en el cual se obtienen la función logística y la curva logística. Para obtener la solución al modelo matemático, se tomó como condición inicial t=0 (tiempo en días) para el 21/03/2020 de tal forma que $x(t)$=4 $\Leftrightarrow x(0)$=4 donde x representa los posibles casos, y 4 el número de casos confirmados en esa fecha. Para el 31/03/2020 $x(t)$=22 $\Leftrightarrow x(31)$=22. Lo anterior con el objeto de estimar en cierto tiempo en días de pandemia el número de población contagiada.

I. INTRODUCCIÓN.

En 1838, el matemático belga Pierre-François Verhulst publicó un artículo en el que introdujo (con diferentes anotaciones) la ecuación logística ahora conocida por el crecimiento de una población [1].

Zurita y colaboradores [2] en su trabajo definen que: el modelo de crecimiento logístico también conocido como modelo de Verhults, describe el crecimiento auto-limitado de una cierta población biológica. Para llegar a dicho afirmación, Verhulst derivó su propia ecuación, de esta forma la ecuación queda definida como:

$$\frac{dP}{dt} = P\left(r - \frac{r}{K}P\right) \qquad (1)$$

Verhulst tomo como marco de referencia que $P(t)$ es el tamaño de una población en todo momento (t). "*Se supone que un medio es capaz de sostener una K determinada de individuos en una población conocida como capacidad de sustento*". Dicha aseveración se transforma en la siguiente ecuación [2]:

$$\frac{dP}{dt} = P(a - bP) \qquad (2)$$

Por lo anterior, si: $a > 0$ y $b > 0$ a esto se le denomina entonces ecuación logística y la solución a la ecuación (2) se le conoce como función logística. La siguiente imagen (1) representa la gráfica de la función logística que se le conoce como curva logística.

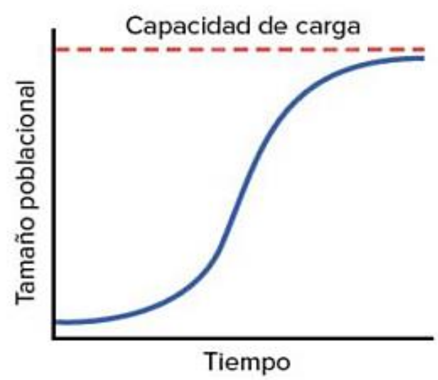


Imagen 1.- Curva de crecimiento logístico [2].

Isea y colaboradores [3] idearon un modelo matemático determinístico cuya base se caracteriza por tener tres ecuaciones diferenciales, que contemplan tres aspectos primordiales de la enfermedad del COVID-19 haciendo énfasis especial a la confiabilidad de los datos. Para ello se dividió a la población total de acorde a tres estudios: susceptibles a contraer la enfermedad (S), infectados por el coronavirus (I), y, finalmente, las personas que se recuperan de la enfermedad (R). Dichos investigadores determinan que haciendo uso de dos metodologías computacionales empleadas en análisis forense de información digital será posible predecir una aproximación del número de contagios en cierto tiempo.

II. DESARROLLO.

Para el desarrollo del modelo matemático se recopilaron los datos de casos confirmados, tomando como referencia el día 21/03/2020 como tiempo (t) $t = 0$ que fue el día en que, según fuentes oficiales [4] se presentaron los primeros cuatro casos en el estado de Michoacán de Ocampo, México. Y como $t = 31$ el 31/03/2020 con 22 casos confirmados [4]. La tabla 1 refleja la información mencionada.

Tabla 1.- Fecha y número de casos confirmados en Michoacán, México [4].

Fecha	Casos confirmados
21/03/2020	4
31/03/2020	22
08/04/2020	39
15/04/2020	79
30/04/2020	341
08/05/2020	571
15/05/2020	850
30/05/2020	1959
08/06/2020	2710
15/06/2020	3703
30/06/2020	5908
08/07/2020	6835
15/07/2020	7628
30/07/2020	9725
08/08/2020	11190
15/08/2020	12167
20/08/2020	13148

Para la obtención del modelo matemático, se procedió a desarrollar la ecuación de Verhulst, con el objetivo de obtener los valores de **K** y **C**. Para ello se tomaron como marco de referencia los siguientes parámetros:

X (0)= 4 casos. 21/03/2020.

X (31)=22 casos. 31/03/2020, suspensión de actividades no esenciales en el estado de Michoacán por covid-19.

La población en Michoacán P (M), según fuentes de la CONAPO [5] es de 4825401 habitantes. De esta forma se tiene que:

P (M)= 4825401 habitantes.

Con los datos anteriores, se procedió a resolver la ecuación de Verhulst (3) con el objetivo de dar solución al modelo matemático propuesto (ecuación 4).

$$\frac{\mathrm{dp}}{\mathrm{dt}} = \mathrm{p}\left(\mathrm{r} - \frac{\mathrm{r}}{\mathrm{k}}\right)\mathrm{p} \qquad (3)$$

$$\frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{dp}} = \alpha\mathrm{x}(4825401 - \mathrm{x}) \qquad (4)$$

Cambiando α por k, y $dp\ por\ dx$ queda:

$$\frac{dx}{dt} = kx(4825401 - x) \qquad (5)$$

Despejando e integrando la ecuacion 5:

$$\frac{dx}{x(4825401-x)} = kdt = \int \frac{dx}{x(4825401-x)} = \int kdt$$

Resolviendo por fracciones parciales

$$\frac{1}{x(4825401 - x)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(4825401 - x)}$$

$$\frac{Ax(4825401 - \boldsymbol{x})}{\boldsymbol{x}} + \frac{Bx(4825401 - x)}{(4825401 - x)}$$

$$1 = A(4825401 - x) + Bx$$

Despeando para obtener A y B.

- Para x_1=4825401

$$1 = A(4825401 - 4825401) + B(4825401)$$

$$1 = B4825401 \rightarrow B = \frac{1}{4825401}$$

- Para $x_2 = 0$

$$1 = A(4825401-0)+B(0)$$

$$1 = A(4825401) \rightarrow A = \frac{1}{4825401}$$

Sustituyendo e Integrando con los valores obtenidos de A y B se tiene:

$$\int \frac{A}{x}dx + \int \frac{B}{(4825401-x)} = \int kdt$$

$$\int \frac{\frac{1}{(4825401)}}{x}dx + \int \frac{\frac{1}{4825401}}{(4825401-x)}dx = kt + c$$

$$u = 4825401 - x$$

$$du = -dx$$

$$\int \frac{-dx}{u} = -\ell n|u| + c$$

$$\frac{1}{(4825401)}\ell n|x| - \frac{1}{(4825401)}\ell n|4825401-x|$$

Factorizando términos semejantes y aplicando propiedades de los logaritmos:

$$\frac{1}{4825401}\ell n\left|\frac{x}{(4825401-x)}\right| = kt + c_o$$

$$\boxed{\ell na - \ell nb = \ell n\left|\frac{a}{b}\right|}$$

$$\ell n\left|\frac{x}{(4825401-x)}\right| = 4825401kt + 4825401c_o$$

$$\frac{x}{(4825401-x)} = c\ e^{4825401k(t)} \qquad (6)$$

Obtención de la constante **c** con las condiciones iniciales.

t=0, x=4

$$\frac{x}{(4825401-x)} = ce^0 \rightarrow \frac{x}{(4825401-x)} = c$$

$$\frac{4}{(4825401-4)} = \frac{c}{1} \rightarrow \frac{4}{(4825397)} = \frac{c}{1}$$

$$\therefore \boxed{c = \frac{4}{(4825397)} = 8.2894\times10^{-7}}$$

Obteniendo el valor de k con las condiciones

t=31, x=22

$$\frac{x}{(4825401-x)} = ce^{4825401kt}$$

$$\frac{22}{(4825401-22)} = 8.2894x10^{-7}e^{4825401k(31)}$$

$$\frac{22}{(4825379)} = 8.2894\times10^{-7}e^{4825401k(31)}$$

$$\frac{4.5592\times10^{-6}}{8.2894\times10^{-7}} = \cancel{e}_{\ell n}^{4825401k(31)}$$

$$\ell n|5.5000| = 4825401k(31)$$

$$4825401k(31) = \ell n|5.5000|$$

Despejando k

$$\boxed{k = \frac{\ell n|5.5000|}{4825401(31)}}$$

$$k = \frac{1.7047}{149587431}$$

Despejar x de la ecuación 6, de tal forma que.

$$x = (4825401)\left(c\ e^{4825401(k)(t)}\right) - cx\ e^{4825401(k)(t)} = 0$$

$$x + cxe^{4825401kt} = 4825401ce^{4825401kt}$$

Factorizando lo anterior se tiene:

$$x[1 + ce^{4825401kt}] = 4825401ce^{4825401kt}$$

Por lo tanto:

$$\boldsymbol{x} = \frac{\boldsymbol{4825401ce^{4825401kt}}}{[\boldsymbol{1} + \boldsymbol{ce^{4825401kt}}]} \qquad (7)$$

La ecuación (7) es la solución al modelo matemático propuesto.

Por lo tanto, se debe recordar que:

$C = 8.2894x10^{-7}$ y $k = 0.000000011$

Para automatizar el uso de la ecuación 7, se programó en el software LabView un algoritmo cuya función seria arrojar el cálculo de la aproximación, mediante la introducción únicamente del tiempo (t). La imagen 2 muestra esta información.

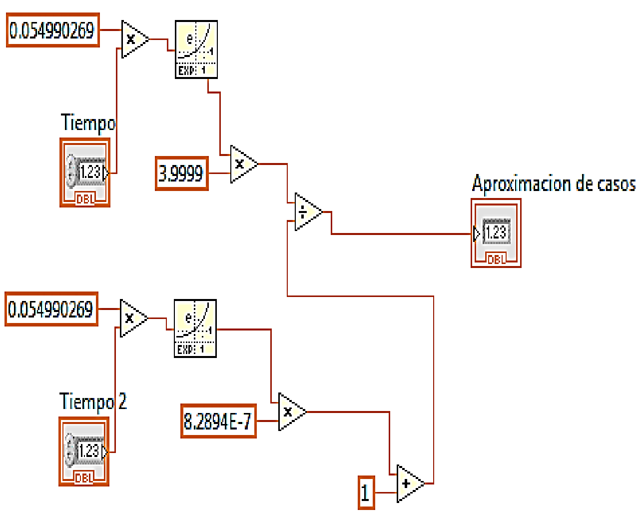


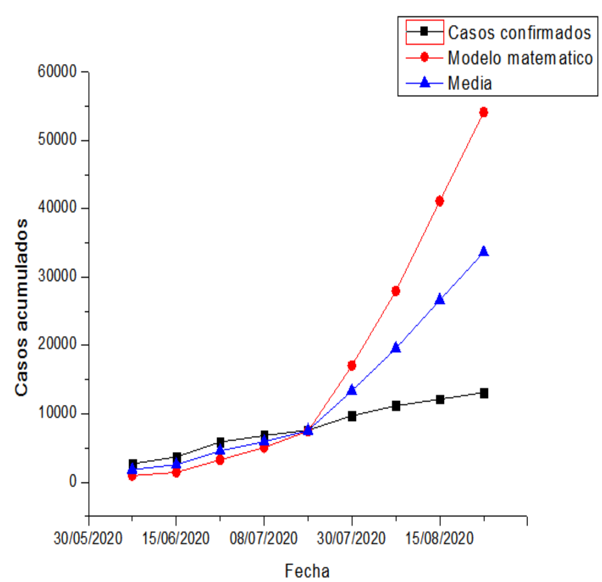
Imagen 2.- Panel frontal del algoritmo utilizado. Labview[R].

III.-RESULTADOS.

Una vez establecido la ecuación y programado el algoritmo para el cálculo de la aproximación, en la siguiente tabla 2 se observa que aunque el resultado con t=0 es igual al número de casos confirmados, así como en t=31, los resultados posteriores se alejan de los casos reales. Este comportamiento puede ser atribuido a varias cuestiones, por una parte no se buscó con precisión los datos que no presentaran demasiada variación, por el contrario si se tomaran datos con mayor precisión cabe la posibilidad de que los datos del modelo se acercaran con mayor exactitud a los datos reales. Lo descrito anteriormente, se observa en la gráfica 1. Donde se puede observar que en efecto, la curva del modelo matemático crece de forma exponencial, en comparación a la curva de los datos reales, e inclusive de la media establecida.

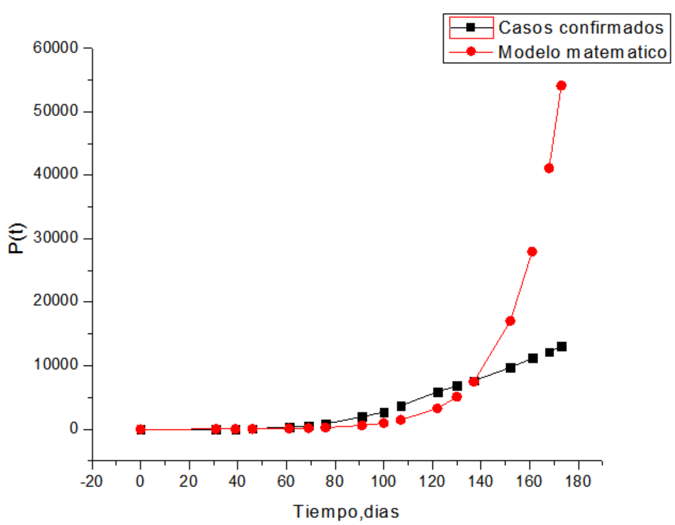
Tabla 2.- Fecha y número de casos confirmados versus modelo matemático.

Fecha	Tiempo (días)	Casos confirmados	Modelo matemático propuesto
21/03/2020	0	4	4
31/03/2020	31	22	22
08/04/2020	39	39	34
15/04/2020	46	79	50
30/04/2020	61	341	115
08/05/2020	69	571	178
15/05/2020	76	850	261
30/05/2020	91	1959	596
08/06/2020	100	2710	978
15/06/2020	107	3703	1437
30/06/2020	122	5908	3278
08/07/2020	130	6835	5090
15/07/2020	137	7628	7480
30/07/2020	152	9725	17065
08/08/2020	161	11190	27993
15/08/2020	168	12167	41136
20/08/2020	173	13148	54154

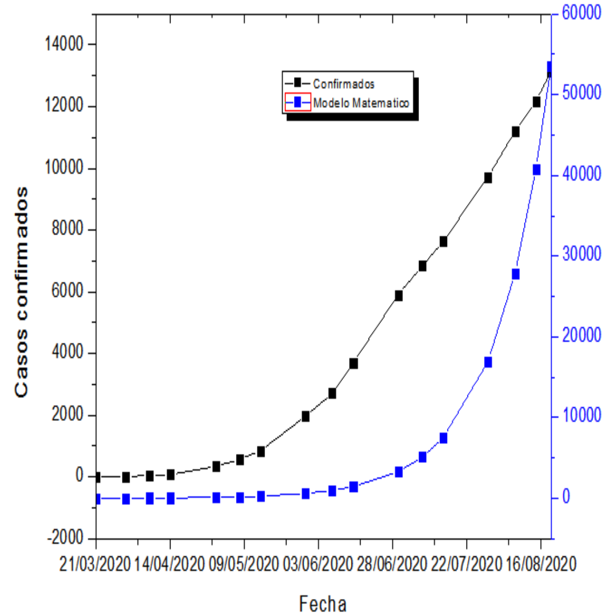


Grafica 1.- Número de casos confirmados versus modelo matemático.

En la gráfica 2 se puede apreciar en un primer vistazo cuan diferentes son las predicciones entre el modelo matemático propuesto y los casos reales confirmados en un tiempo determinado. Se observa que para un tiempo t= 173 la curva del modelo matemático propuesto se dispara de forma exponencial, mientras que la curva de los casos reales confirmados se mantiene con pocos cambios significativos, observándose una tendencia casi lineal. El comportamiento de esta divergencia puede ser atribuida a lo que indican Zurita y colaboradores [2]. Como primera instancia a las definiciones del problema al plantear el modelo matemático, otros de los causantes puede ser la forma en que se obtuvieron los datos, lo cual tal como lo indica Isea y colaboradores [3], si la obtención de datos no es la correcta, esta genera incertidumbre en las mismas trayendo como consecuencia que el modelo matemático propuesto se aleje cada vez más de los datos reales, vea gráfica 3.



Grafica 2.- Número de casos confirmados versus modelo matemático en función del tiempo (días).



Grafica3.- Número de casos confirmados versus modelo matemático. Al lado derecho, estimaciones del modelo matemático propuesto, y de lado izquierdo casos reales confirmados.

IV.-CONCLUSIONES.

“*La pandemia COVID-19 parece que ha tomado al mundo por sorpresa. A pesar de que existen formalismos matemáticos muy maduros para predecir y acompañar pandemias, el mundo asiste perplejo a la muerte de cientos de miles y a una de las mayores crisis económicas de que se tenga memoria. De manera sigilosa los dirigentes políticos, con algunas pocas excepciones, guiados por el paradigma del libre mercado, se han abocado a desmantelar durante los últimos 30 años el sistema de salud pública”* [6].

Como se pudo apreciar en este trabajo, la solución al modelo matemático propuesto (ecuación 7), dicha ecuación logra aproximar los datos correctamente; sin embargo, al intentar predecir el número de contagios con el tiempo y fecha establecido , los datos del modelo matemático distan de los reales, sobre todo en la última fecha(20/08/20), esto puede ser ocasionado como ya se mencionó anteriormente, al planteamiento del modelo matemático propuesto y la obtención más certera de datos para la elaboración de la misma.

REFERENCIAS.

[1].- Verhulst y la ecuación logística en la dinámica de la población. European Communications in Mathematical and Theoretical Biology 10 (2008) 24 – 26.

https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01562340

[2].- Modelo logístico de COVID19
Zurita, Lizbeth. Mora, Sergio. Medina, Adán.
Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey, Campus Ciudad de México, México
A01331840@itesm.mx

[3].- **Raúl Isea, Fundación Instituto de Estudios Avanzados (IDEA)**
http://orcid.org/0000-0002-6318-3428, raul.isea@gmail.com, Venezuela.

[4].-COMUNICADO TECNICO DIARIO COVID-19.URL:https://michoacan.gob.mx/wp-content/uploads/2020/05/cdt-31-mayo-COVID.pdf

[5]. - URL:
https://webcache.googleusercontent.com/search?q=cache:xgV3uXJh3CEJ:https://www.quadratin.com.mx/sucesos/crecio-5-la-poblacion-de-michoacan-en-5-anos/+&cd=5&hl=es-419&ct=clnk&gl=mx

[6].- **Entendamos el COVID-19 en México.**
Octavio Miramontes. Instituto de Física
Universidad Nacional Autónoma de México
4 de septiembre de 2020.