

CINEMÁTICA DE LA PARTÍCULA; MOVIMIENTOS PARTICULARES.

Javier Pajon Permuy.

Cita:

Javier Pajon Permuy (1998). *CINEMÁTICA DE LA PARTÍCULA; MOVIMIENTOS PARTICULARES*. CINEMÁTICA DE LA PARTÍCULA; MOVIMIENTOS PARTICULARES.

Dirección estable: <https://www.aacademica.org/javier.pajon.permuy/8>

ARK: <https://n2t.net/ark:/13683/pvp3/hSw>



Esta obra está bajo una licencia de Creative Commons.
Para ver una copia de esta licencia, visite
<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/deed.es>.

Acta Académica es un proyecto académico sin fines de lucro enmarcado en la iniciativa de acceso abierto. Acta Académica fue creado para facilitar a investigadores de todo el mundo el compartir su producción académica. Para crear un perfil gratuitamente o acceder a otros trabajos visite: <https://www.aacademica.org>.

CINEMÁTICA DE LA PARTÍCULA; MOVIMIENTOS PARTICULARES.

Pajón, Javier y Dávila, Juan Antonio.

Cita: Pajón, Javier y Dávila, Juan Antonio (1998). *CINEMÁTICA DE LA PARTÍCULA; MOVIMIENTOS PARTICULARES*. LECCIÓN Y APUNTES DE CINEMÁTICA DE LA PARTÍCULA; MOVIMIENTOS PARTICULARES.

Dirección estable: <https://www.aacademica.org/javier.pajon.permuy/13>



Esta obra está bajo una licencia de Creative Commons.

Para ver una copia de esta licencia, visite

<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/deed.es>.

Acta Académica es un proyecto académico sin fines de lucro enmarcado en la iniciativa de acceso abierto. Acta Académica fue creado para facilitar a investigadores de todo el mundo el compartir su producción académica. Para crear un perfil gratuitamente o acceder a otros trabajos visite: <http://www.aacademica.org>.

TEMA XVI

CINEMÁTICA DE LA PARTÍCULA; MOVIMIENTOS PARTICULARES

16.1.- Movimientos rectilíneos. - Tal y como se dijo, tomaremos el eje de las x como eje de la trayectoria y emplearemos exclusivamente coordenadas cartesianas, ya que son las que hacen más sencillo y natural el fenómeno físico:

$$\vec{r} = x \cdot \vec{i}, \text{ o simplemente}$$

$$r = x \quad ; \quad v = \dot{x} \quad ; \quad a = \dot{v} = \ddot{x} \quad ; \quad x = x(t)$$

Recordamos la conveniente expresión, ya deducida, $a \cdot dx = v \cdot dv$, que es especialmente útil cuando conozcamos $a = f(x)$.

Cuando los datos del problema sean $v = f(t)$, calcularemos:

$$x = \int v \cdot dt = \int_{t_1}^{t_2} f(t) \cdot dt \quad ; \quad a = \dot{v} = f'(t)$$

Finalmente, si se conoce $a = \phi(t)$:

$$v = \int_{t_1}^{t_2} \phi(t) \cdot dt = g(t) \Big|_{t_1}^{t_2} \quad ; \quad x = \int_{t_1}^{t_2} g(t) \cdot dt = \int_{t_1}^{t_2} [g(t_2) - g(t_1)] \cdot dt$$

Por otra parte, si se parte del dato $a = f(v)$, sacando también de la anterior expresión $a \cdot dx = v \cdot dv$, tendremos:

$$\int_{x_1}^{x_2} dx = \int_{v_1}^{v_2} \frac{v \cdot dv}{f(v)} = g(v) \Big|_{v_1}^{v_2}$$

que será resoluble fácilmente o no cuanto lo sea la integral segunda, como ya hemos dicho repetidas veces. Un caso práctico es el de las fuerzas resistentes proporcionales al cuadrado de la velocidad, que se estudia en aerodinámica, y que conduce a aceleraciones $a = -k \cdot v^2$:

$$-k \cdot v^2 \cdot dx = v \cdot dv \quad ; \quad \int -k \cdot dx = \int \frac{dv}{v}$$

aunque también puede resolverse mediante:

$$a = f(v) = \frac{dv}{dt} \quad ; \quad \int_{t_1}^{t_2} dt = \int_{v_1}^{v_2} \frac{dv}{f(v)} = g(v) \Big|_{v_1}^{v_2}$$

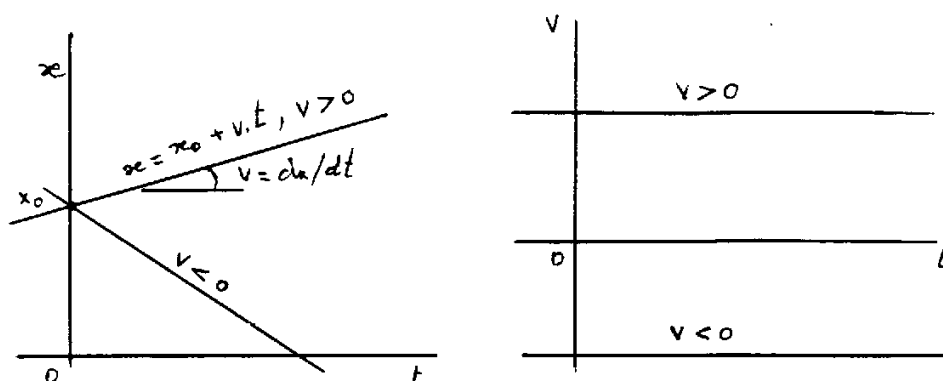
$$\text{Cuando se conozca } v = f(x) = dx/dt : \int_{t_1}^{t_2} dt = \int_{x_1}^{x_2} dx/f(x) = g(x) \Big|_{x_1}^{x_2}$$

Siempre, como ya queda dicho, será muy conveniente en todos los casos recurrir a los gráficos correspondientes; a veces, repetimos, los gráficos son una gran ayuda, incluso para los cálculos.

- 16.2.- Movimientos uniforme y uniformemente variado.- El primero se define como aquel que posee velocidad constante y, por tanto, aceleración nula:

$$a = 0 \quad ; \quad v = dx/dt \quad ; \quad \int_{x_0}^x dx = \int_0^t v \cdot dt \quad ; \quad \boxed{x = x_0 + v \cdot t}$$

Sus gráficas, $x = x(t)$, $v = v(t)$ son, evidentemente:



El segundo, el uniformemente variado, se define como el que posee aceleración constante:

$$a = dv/dt ; \quad \boxed{v = v_0 + a \cdot t} ; \quad \text{vel. media} = V_m = \frac{v - v_0}{t}$$

$$v = v_0 + a \cdot t = \frac{dx}{dt} ; \quad \boxed{x = x_0 + v_0 \cdot t + \frac{a \cdot t^2}{2}}$$

Despejando el tiempo de la velocidad y sustituyéndolo en el espacio, obtenemos:

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2 \cdot a \cdot (x - x_0)}$$

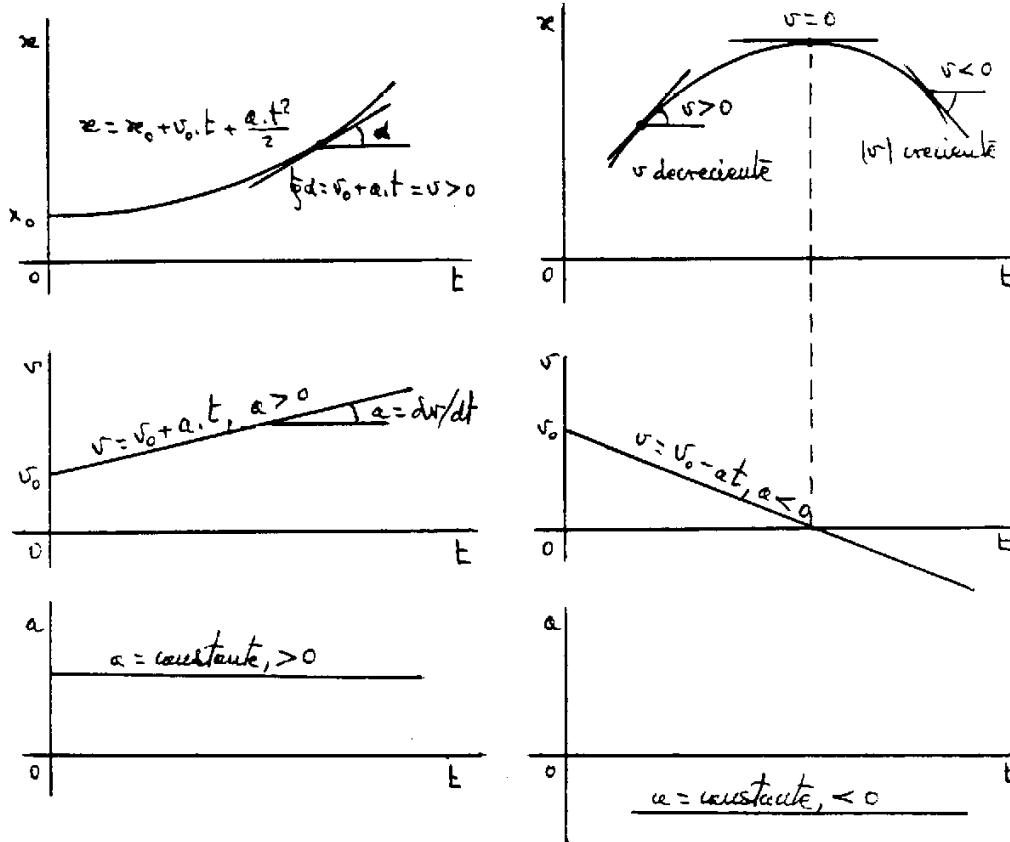
Si $x_0 = 0$, espacio inicial nulo; y si, además, $v_0 = 0$, velocidad inicial nula, quedan, respectivamente:

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2 \cdot a \cdot x} ; \quad v = \sqrt{2 \cdot a \cdot x}$$

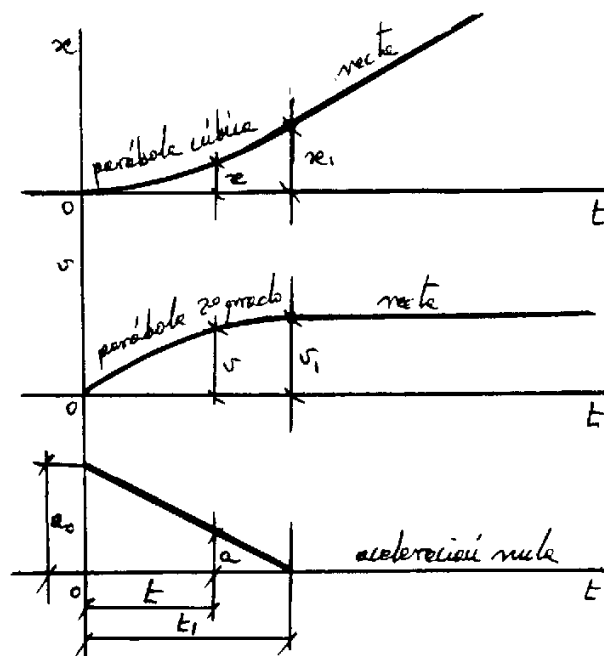
Se ha de aclarar, porque notamos con frecuencia el error conceptual de los estudiantes, que el movimiento de los graves en el vacío es simplemente un movimiento uniformemente acelerado de aceleración la gravedad, $a = g$, supuesta constante; y que valen, por tanto, cuantas fórmulas se acaban de exponer. Es útil considerarlo ascendente ($a = -g$) o descendente, sentido positivo de las alturas hacia abajo ($a = g$), según los casos; y es útil considerar la altura máxima,

$$v = \sqrt{2 \cdot g \cdot h}$$

Las gráficas de este movimiento uniformemente acelerado se exponen a continuación:



- 16.3.- Movimiento de vehículos automotores en fase de arranque. - Se admite con bastante aproximación, en función de ensayos realizados, que el arranque de vehículos automotores tiene lugar de modo que su aceleración posee el valor máximo, a_0 , inicialmente, disminuyendo después según una ley lineal, hasta anularse cuando el vehículo adquiere su velocidad de régimen, v_1 , en el instante t_1 ; de los diagramas deducimos:



$$a = \frac{a_0}{t_1} \cdot (t_1 - t) = \frac{dv}{dt} \quad ; \quad \int_0^v dv = \frac{a_0}{t_1} \int_0^{t_1} (t_1 - t) \cdot dt$$

$$v = \frac{a_0}{t_1} \cdot \left[t_1 \cdot t - \frac{t^2}{2} \right] \quad \text{(parábola de 2º grado);}$$

volviendo a integrar:

$$x = \int_0^x dx = \frac{a_0}{t_1} \cdot \left[t_1 \cdot \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{6} \right] = \frac{a_0 \cdot t^2}{2 \cdot t_1} \cdot \left[t_1 - \frac{t}{3} \right] \quad \text{parábola de 3er. grado}$$

haciendo en las anteriores ecuaciones $t = t_1$ obtendremos la velocidad de régimen, v_1 , y el espacio recorrido:

$$v_1 = \frac{a_0 \cdot t_1}{2} \quad ; \quad a_0 = \frac{2 \cdot v_1}{t_1} \quad ; \quad x_1 = \frac{a_0 \cdot t_1^2}{3} = \frac{2}{3} \cdot v_1 \cdot t_1$$

Obsérvese que la aceleración, a_0 , es doble de la que

correspondería a un movimiento uniformemente acelerado. A partir de t_1 se anula la aceleración y resulta un movimiento uniforme.

- 16.4.- Movimiento armónico simple. - Sin perjuicio de que en capítulos próximos, al estudiar la Cinética de la partícula, partamos de otras consideraciones, aquí lo definiremos por la expresión:

$$x = A \cdot \text{sen}(w \cdot t + \alpha)$$

derivando dos veces:

$$v = \dot{x} = A \cdot w \cdot \cos(w \cdot t + \alpha)$$

$$a = \dot{v} = \ddot{x} = -A \cdot w^2 \cdot \text{sen}(w \cdot t + \alpha) = -w^2 \cdot x$$

siendo el seno y el coseno funciones periódicas de periodo $2 \cdot \pi$, los valores de x , v , a lo serán también de igual periodo, es decir, se repetirán cuando:

$$(w \cdot t + \alpha) - (w \cdot t_1 + \alpha) = 2 \cdot \pi \quad ; \quad t - t_1 = \frac{2 \cdot \pi}{w} = T$$

T se denomina periodo, y es el tiempo transcurrido para que el móvil repita sus valores (de una oscilación completa, como veremos); a su inversa, $1/T = f$, se la denomina frecuencia, y representa el número de oscilaciones que el móvil da en la unidad de tiempo, en un segundo:

en un tiempo T una oscilación ($= 2 \cdot \pi$ radianes)

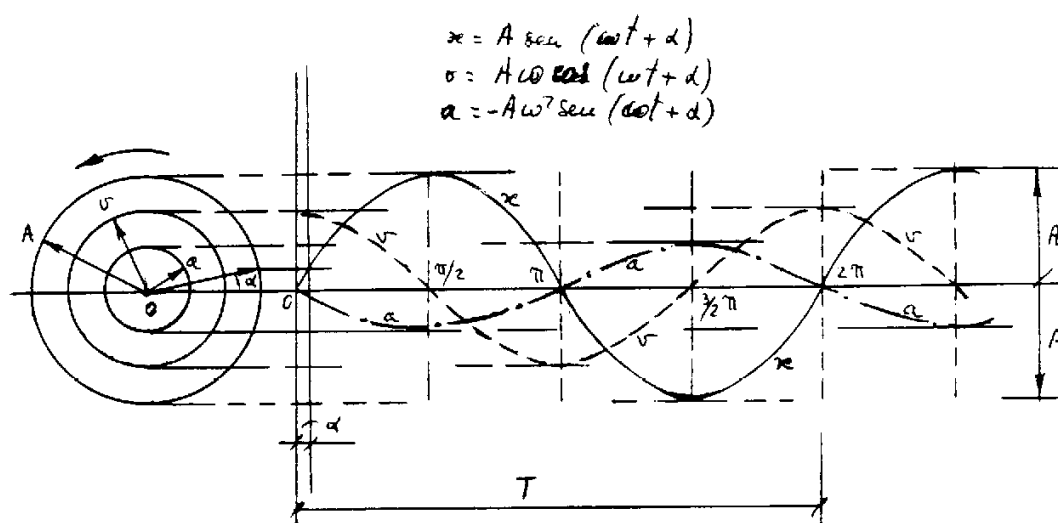
en un tiempo $1''$ f oscilaciones

$$\frac{T}{1} = \frac{1}{f} \quad ; \quad f = \frac{1}{T} = \frac{w}{2 \cdot \pi}$$

Como se verá en la Cinética de la partícula, este movimiento coincide con el producido, por ejemplo, en los resortes elásticos, en los cuales existe una fuerza recuperadora proporcional al alargamiento, x , elongación; $f = -k \cdot x = m \cdot a$;

$$a = -\frac{k}{m} \cdot x = -w^2 \cdot x \quad ; \quad w = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Volviendo a las ecuaciones de x , v , a , antes tratadas, y representándolas gráficamente, resulta la figura:



Considerando un vector, A , girando alrededor de O con una velocidad angular constante, w , de tal forma que determine con el eje de abscisas el ángulo $\alpha + w \cdot t$, su proyección sobre el eje de ordenadas será " $A \cdot \operatorname{sen}(w \cdot t + \alpha)$ "; y, análogamente, la velocidad será la proyección del vector $A \cdot w$, adelantado $\pi/2$ radianes; la aceleración será el vector $A \cdot w^2$ adelantado π radianes (o en oposición con el x).

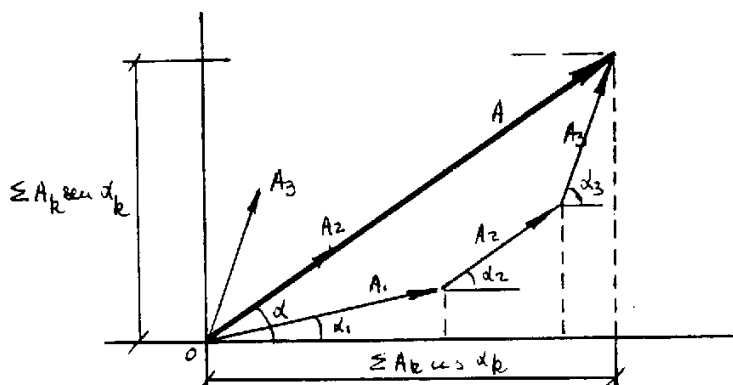
Se ve que se alcanzan los máximos de x en $\pm A$; y que en esos instantes la velocidad es nula (como corresponde a un cambio de sentido). La aceleración se opone siempre al movimiento y va dirigida hacia el centro (negativa cuando x es positiva y a la inversa), siendo nula al pasar el punto por O y máxima en los extremos (cambio de sentido de la velocidad, máximo cambio absoluto). La velocidad es máxima en el paso por O , justamente cuando no existe aceleración.

x se denomina elongación; la máxima elongación, A , es la semiamplitud del movimiento. Se llama oscilación completa al recorrido del punto saliendo de una posición completa en un instante t_1 y volviendo a pasar al cabo de $t = t_1 + T$ (en cuyo instante vuelve a tener los mismos valores de v y a) y en la página anterior se analizó la relación entre T , periodo, y f , frecuencia.

16.5.- Composición de movimientos armónicos de igual frecuencia y dirección..- Sea el movimiento:

$$x = A_1 \cdot \text{sen}(w \cdot t + \alpha_1) + A_2 \cdot \text{sen}(w \cdot t + \alpha_2) + \dots = \\ = \Sigma A_k \cdot \text{sen}(w \cdot t + \alpha_k),$$

que podemos considerarlo como una suma de movimientos armónicos de igual periodo, $T = 2 \cdot \pi / w$, fases iniciales y amplitudes distintas. Según hemos visto, $x_k = A_k \cdot \text{sen}(w \cdot t + \alpha_k)$ es la proyección sobre el eje de ordenadas del vector A_k , formando el ángulo $w \cdot t + \alpha_k$ con el eje de abscisas; repitiendo con los demás, al ser w la misma en todos los casos, formarán una figura invariable, girando alrededor de 0; el resultado es



como considerar un solo vector, suma geométrica de todos los A_k , tal que:

$$x = \Sigma A_k \cdot \text{sen}(w \cdot t + \alpha_k) = A \cdot \text{sen}(w \cdot t + \alpha)$$

$$A = \sqrt{(\Sigma A_k \cdot \text{sen} \alpha_k)^2 + (\Sigma A_k \cdot \text{cos} \alpha_k)^2} \quad ; \quad \text{tga} = \frac{\Sigma A_k \cdot \text{sen} \alpha_k}{\Sigma A_k \cdot \text{cos} \alpha_k}$$

Obsérvese que si A , vector resultante, es nulo, el movimiento resultante es también nulo y se dice entonces que hay interferencia [por ejemplo, la suma de dos vectores con igual valor de la amplitud, A , y desfasados π radianes, $A \cdot \text{sen} w \cdot t$ y $A \cdot \text{sen}(w \cdot t + \pi)$].

- 16.6.- Movimientos periódicos en general y movimientos periódicos amortiguados..- Dado el carácter elemental de la materia, solo pretendemos que el alumno conozca de la existencia de otros movimientos más complejos.

Los movimientos armónicos antes estudiados son periódicos (es decir, se repiten los valores de x y, por tanto, de v y a); pero no son los únicos periódicos, y son armónicos por las funciones senoidales. En general, dada la ecuación del movimiento, $x = \phi(t)$, se dirá que es periódica de periodo T si se cumple que:

$$x = \phi(t) = \phi(t + k \cdot T) \quad ; \quad k = 1, 2, 3, \dots, n$$

por supuesto, v y a también son funciones periódicas:

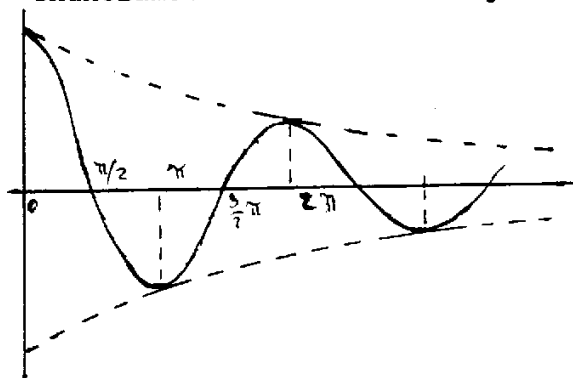
$$v = \phi'(t) = \phi'(t + k \cdot T) \quad ; \quad a = \phi''(t) = \phi''(t + k \cdot T)$$

También se puede estudiar la composición de movimientos armónicos de frecuencias diferentes, es decir, tales que w no sea la misma en cada movimiento parcial:

$$x_1 = A_1 \cdot \text{sen}(w_1 \cdot t + \alpha_1) \quad ; \quad x_2 = A_2 \cdot \text{sen}(w_2 \cdot t + \alpha_2)$$

pero aquí el resultado se complica y solo hacemos enunciarlo. Finalmente, y en coincidencia con los problemas reales, existen movimientos periódicos amortiguados, en los que la amplitud va decreciendo (caso de un resorte, por pérdidas energéticas internas). Solo enunciamos su ecuación y su gráfica aproximada:

$$x = a \cdot e^{-\alpha \cdot t} \cdot \cos(w \cdot t - \phi)$$

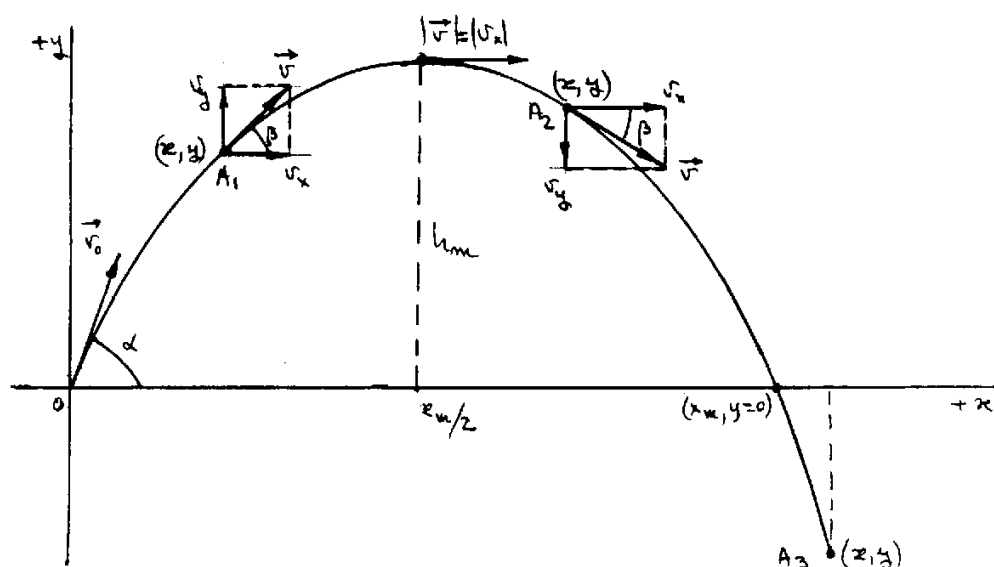


- 16.7.- Movimiento circular..- No nos referimos al movimiento circular de w constante, ya estudiado más atrás. Estudiamos el caso más general de un movimiento circular de radio R y $s = f(t)$:

$$v = \frac{ds}{dt} = R \cdot \frac{d\theta}{dt} \quad ; \quad a_t = \frac{d^2s}{dt^2} = f''(t) \quad ;$$

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{[f'(t)]^2}{R}$$

16.8.- Movimiento parabólico (en el vacío)..- Consideremos un móvil lanzado desde el origen con una velocidad inicial, v_0 , que for-



ma un ángulo α con la horizontal. Entendemos, según nuestra experiencia, que el modo más fácil de estudiar este movimiento es descomponerlo en dos: uno horizontal, de velocidad inicial $v_0 \cdot \cos \alpha$, que es uniforme (sin resistencia alguna en el vacío, y sin acción gravitatoria); otro vertical, de velocidad inicial $v_0 \cdot \sin \alpha$, y ascendente positivo, pero con la acción gravitatoria " $-g$ ". A partir de estas consideraciones, y siempre considerando "ambos movimientos simultáneos e independientes", todo el cálculo es fácil:

$$v_x = v_0 \cdot \cos \alpha = \text{constante} \quad [1] \quad ; \quad v_y = v_0 \cdot \sin \alpha - g \cdot t \quad [2]$$

$$x = v_0 \cdot t \cdot \cos \alpha \quad [3] \quad ;$$

$$y = v_0 \cdot t \cdot \sin \alpha - 1/2 \cdot g \cdot t^2 \quad [4]$$

La ecuación de la trayectoria, $y = f(x)$, se obtiene eliminando t entre [3] y [4]; hágalo el lector; se obtiene:

$$y = x \cdot \operatorname{tg} \alpha - \frac{g \cdot x^2}{2 \cdot v_0^2 \cdot \cos^2 \alpha}$$

que es la ecuación de la parábola antes dibujada.

El alcance máximo, x_m , se obtendrá simplemente de hacer $y = 0$ en [4], despejar t (la solución $t = 0$ es válida en el origen) y llevar a [3], con lo que sale:

$$x_m = \frac{v_0^2 \cdot \operatorname{sen} 2\alpha}{g} \quad [5]$$

Para una cierta velocidad, v_0 , y ángulos α variables, se obtienen de [5] distintos alcances; el máximo será para $\operatorname{sen} 2\alpha = 1$, $\alpha = 45^\circ$.

El tiempo que invertirá el móvil en el alcance máximo, $y = 0$, deducido de [4], como se dijo, vale:

$$t_m = \frac{2 \cdot v_0 \cdot \operatorname{sen} \alpha}{g} \quad [6]$$

Admitiendo la simetría de la parábola, y de la independencia de ambos movimientos, se deduce que la altura máxima, h_m , ocurrirá para valores mitad de [5] y [6]; sustituyendo en [4] el valor mitad de [6] se obtiene:

$$h_m = \frac{v_0^2 \cdot \operatorname{sen}^2 \alpha}{2 \cdot g} \quad (\text{para } x = x_m/2) \quad [7]$$

Aclaremos al alumno que las ecuaciones [1], [2], [3] y [4] son válidas para cualquier punto de la trayectoria, tales como los A1, A2, A3, de la figura anterior. En los A1 y A2 las alturas serán positivas, siendo el tiempo en los A1 menor que $t_m/2$; y en los A2 tal tiempo mayor que $t_m/2$ y menor que t_m . En los puntos A3 la altura será negativa y el tiempo mayor que t_m , pero, repetimos, con el mismo uso de las ecuaciones referidas.

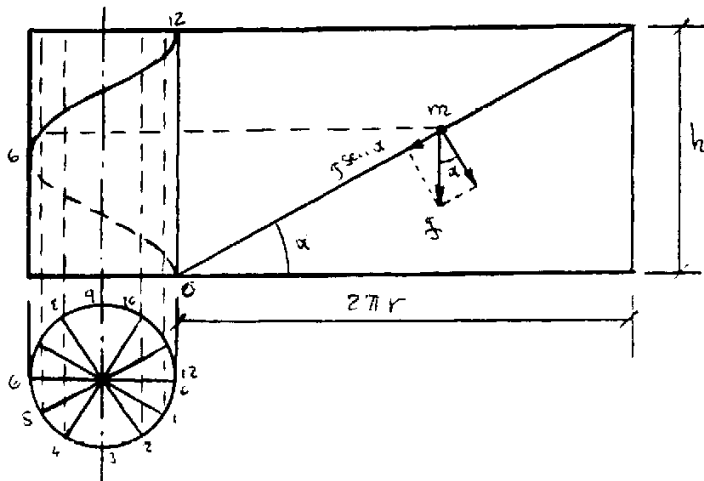
Respecto a la velocidad total, $\vec{v}$, será en cada punto tangente a la trayectoria; y siempre $v_x = v_0 \cdot \cos \alpha = \text{constante}$; en tanto que v_y dependerá del tiempo, pudiendo ser positiva o negativa, según la ecuación (2); en la máxima altura se verificará que $v_y = 0$, existiendo solo v_x . El ángulo en cada punto y la velocidad total se podrán calcular por:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{v_y}{v_x} \quad ; \quad v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

Para calcular las aceleraciones tangencial y normal, recordando el capítulo anterior, habrá que hallar en cada punto el radio de curvatura: $a_n = v^2 / \rho$, $a_t^2 + a_n^2 = g^2$, estando $\vec{a}_t$ en la dirección de $\vec{v}$ y $\vec{a}_n$ normal a $\vec{a}_t$ (en función de los ángulos β calculados).

Del mismo modo, considerando siempre dos movimientos independientes y simultáneos, se podrán resolver todos los problemas de lanzamiento desde torres o aviones, etc.; en cada caso convendrá considerar la altura positiva hacia arriba o hacia abajo, con la única diferencia en este segundo supuesto de que el movimiento vertical se estudiará acelerado y no retardado, g positiva. Finalicemos diciendo al alumno que rara vez es aconsejable usar la ecuación de la trayectoria, salvo en caso de problemas muy concretos.

- 16.9.- Movimiento helicoidal.— Sea un punto que describe una hélice cilíndrica de paso h , situada sobre un cilindro de radio r (ver figura inferior) y con un movimiento de ecuación $s = f(t)$.



Observar que el movimiento puede suponerse como el relativo al

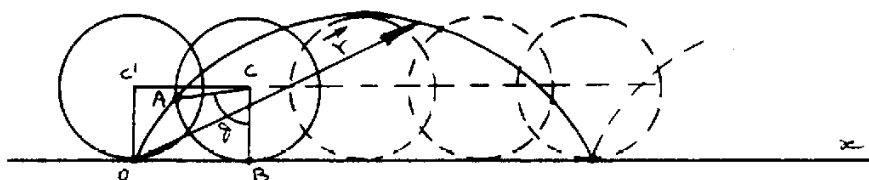
plano inclinado de la derecha de la misma figura, lo cual puede ayudar en muchos casos a la resolución del problema. Su velocidad y su aceleración se calculan:

$$v = \frac{ds}{dt} = f'(t) ; \quad a_t = \frac{dv}{dt} = f''(t) ; \quad a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{[f'(t)]^2}{\rho}$$

siendo el radio de curvatura de la hélice:

$$\rho = \frac{1}{r} \cdot \left[r^2 + \frac{h^2}{4 \cdot \pi^2} \right]$$

- 16.10.-Movimiento plano cicloide.- Sea un disco circular de radio r , que rueda sin deslizarse a lo largo del eje x con una velocidad constante, v , como se indica en la figura inferior.



En el instante $t = 0$ un punto A sobre la periferia del disco coincide con el origen. El movimiento de dicho punto A describe la curva denominada cicloide; si el centro del disco se mueve con la velocidad v y recorre una distancia $v \cdot t$ durante un intervalo de tiempo t , el arco circular AB tendrá la misma longitud que OB . Entonces podremos escribir:

$$\widehat{AB} = r \cdot \theta = \overline{OB} = \overline{C'C} = v \cdot t, \quad \text{siendo} \quad \theta = \angle ACB = v \cdot t / r$$

Así que la trayectoria de A puede escribirse:

$$x = v \cdot t - r \cdot \sin \frac{v \cdot t}{r} \quad ; \quad y = r - r \cdot \cos \frac{v \cdot t}{r}$$

Derivando ahora una y otra vez con respecto a t , obtenemos:

$$\dot{x} = v - v \cdot \cos \frac{v \cdot t}{r} \quad ; \quad \dot{y} = v \cdot \sin \frac{v \cdot t}{r}$$

$$\ddot{x} = \frac{v^2}{r} \cdot \sin \frac{v \cdot t}{r} \quad ; \quad \ddot{y} = \frac{v^2}{r} \cdot \cos \frac{v \cdot t}{r}$$

Por lo tanto, el desplazamiento, la velocidad y la aceleración de A son:

$$\vec{r} = \left[v \cdot t - r \cdot \sin \frac{v \cdot t}{r} \right] \cdot \vec{i} + r \cdot \left[1 - \cos \frac{v \cdot t}{r} \right] \cdot \vec{j}$$

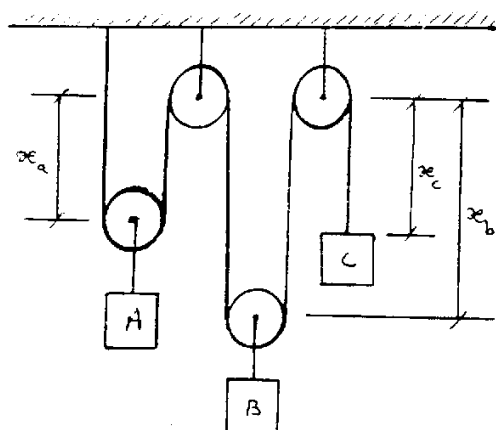
$$\vec{v} = v \cdot \left[1 - \cos \frac{v \cdot t}{r} \right] \cdot \vec{i} + v \cdot \sin \frac{v \cdot t}{r} \cdot \vec{j}$$

$$\vec{a} = \frac{v^2}{r} \cdot \sin \frac{v \cdot t}{r} \cdot \vec{i} + \frac{v^2}{r} \cdot \cos \frac{v \cdot t}{r} \cdot \vec{j} \quad ; \quad |\vec{a}| = |a_n \cdot \vec{n} + a_t \cdot \vec{t}| = \frac{v^2}{r}$$

La última expresión de $|a|$ sale de que, como veremos más adelante, y al ser w constante, no hay aceleración tangencial ($dw/dt = 0$; $a_t = \alpha \cdot r = dw/dt \cdot r$) y solo normal, $a_n = v^2/r = w^2 \cdot r$.

- 16.11.- Movimientos interdependientes.- En algunos casos la posición de unas partículas dependen de las de otras, diciéndose entonces que los movimientos son interdependientes.

Sea el caso de la figura adjunta; se observa que la longitud de la cuerda, supuesta inextensible, es constante; de ahí que



$$2 \cdot x_a + 2 \cdot x_b + x_c = \text{const.}$$

$$2 \cdot v_a + 2 \cdot v_b + v_c = 0$$

$$2 \cdot a_a + 2 \cdot a_b + a_c = 0$$

se puedan considerar las ecuaciones escritas a la derecha; como dos de las coordenadas pueden ser arbitrariamente elegidas, se dice que el sistema tiene "dos grados de libertad"; si la relación es lineal, derivando dos veces respecto del tiempo, se escriben las relaciones de arriba, segunda y tercera, que son relaciones cinemáticas complementarias para resolver el problema. En general, se toma un sentido positivo (por ejemplo, descendente), se suponen unos sentidos de cada partícula (por ejemplo, todos descendentes, aunque sea un absurdo) y la solución final dará los positivos (hacia abajo) y negativos (hacia arriba). El alumno podrá ensayar sus propios ejercicios prácticos.