

Comparación de Métodos de estimación del Modelo de Lee-Carter.

Blaconá, María Teresa y Andreozzi, Lucía.

Cita:

Blaconá, María Teresa y Andreozzi, Lucía (2011). *Comparación de Métodos de estimación del Modelo de Lee-Carter. XXXIX Coloquio Argentino de Estadística. Universidad Nacional del Litoral, Santa Fe.*

Dirección estable: <https://www.aacademica.org/lucia.andreozzi/39>

ARK: <https://n2t.net/ark:/13683/preH/nFT>



Esta obra está bajo una licencia de Creative Commons.
Para ver una copia de esta licencia, visite
<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/deed.es>.

Acta Académica es un proyecto académico sin fines de lucro enmarcado en la iniciativa de acceso abierto. Acta Académica fue creado para facilitar a investigadores de todo el mundo el compartir su producción académica. Para crear un perfil gratuitamente o acceder a otros trabajos visite: <https://www.aacademica.org>.

COMPARACIÓN DE MÉTODOS DE ESTIMACIÓN DEL MODELO DE LEE-CARTER (ARGENTINA)

ANDREOZZI, L. BLACONÁ, M.T.

Facultad de Ciencias Económicas y Estadística UNR

Consejo de Investigaciones de la UNR

landreozzi@fcecon.unr.edu.ar, mblacona@fcecon.unr.edu.ar

RESUMEN

Palabras Clave: Índice de mortalidad, máxima verosimilitud log-bilineal Poisson, Mínimos cuadrados ponderados, Nelder-Mead, BFGS

I. Introducción

Predecir con exactitud el proceso de envejecimiento de la población es ahora más que nunca una preocupación de los gobiernos nacionales, por sus repercusiones económicas y sociales. El modelo de Lee-Carter es un método estadístico sólido, formal, relativamente reciente y ampliamente usado en diversas partes del mundo que permite predecir el comportamiento de la mortalidad a través del tiempo por género y edad. Además resulta de gran utilidad en el área epidemiológica, por ejemplo es implementado para estudiar el comportamiento de las tasas de mortalidad por causa de muerte, ya que sus resultados pueden aplicarse en la promoción y prevención de la salud. El modelo ha sido perfeccionado a través de los años, utilizando nuevos y más eficaces métodos de estimación. El método de pronóstico de Lee y Carter tiene un desarrollo estadístico riguroso, ya que está basado en un modelo explícito que permite no solamente el cálculo de pronósticos puntuales, sino que produce también medidas de incertidumbre y sirve como base para realizar inferencias en general. En los diversos países donde se ha utilizado, E.E.U.U. (Lee y Carter 1992), Canadá (Lee y Nault 1993), Chile (Lee y Rofman 1994), Japón (Wilmoth 1996), y Bélgica (Brouhns y otros 2001) este método ha proporcionado mejores resultados que los métodos tradicionales, en términos de precisión estadística de las proyecciones, ya que los modelos de predicción utilizados oficialmente presentan sobreestimación de la mortalidad y principalmente falta de medidas de sensibilidad

e incertidumbre de las características estimadas. En este trabajo se avanza sobre la aplicación del modelo de Lee-Carter en Argentina (Andreozzi, 2010) implementando métodos alternativos de estimación, que requieren de la utilización de algoritmos iterativos, para los cuáles se presentan varias opciones.

En la sección II se presenta el modelo de Lee-Carter, su método de estimación clásico y los métodos alternativos. Además se presentan los algoritmos iterativos utilizados y el software empleado para su implementación. La sección III introduce las medidas de bondad de ajuste que se tienen en cuenta en la evaluación de las diferentes estimaciones obtenidas. En el punto IV se describen los datos, las tasas de mortalidad específicas por edad y género. La sección V comprende el análisis empírico, los resultados obtenidos, comparando algoritmos y métodos de estimación. La sección culmina con el análisis de los residuos. Por último en la sección IV se presentan las conclusiones

II. Estimación del modelo

II.1 Primera estimación del modelo

Lee y Carter (1992) propusieron un modelo simple para describir el cambio secular en la mortalidad total, como función de un único parámetro, k_t . El método describe el logaritmo de la serie de las tasas de mortalidad específicas por edad como la suma de los siguientes componentes: edad, (independiente del tiempo) y el producto de un parámetro que varía en el tiempo por otro que representa cuán rápidamente varía la mortalidad para cada edad. El modelo puede escribirse como sigue:

$$f_{x,t} = \ln(\tilde{m}_{x,t}) = a_x + b_x k_t + \varepsilon_{x,t}, \quad x = 1, \dots, X \quad y \quad t = 1, \dots, T, \quad (1)$$

donde $\tilde{m}_{x,t}$ es la tasa de mortalidad específica por edad observada a la edad x durante el tiempo t , X y T son el número de categorías de edad y la cantidad de años evaluados respectivamente. La tasa observada de mortalidad es el número de muertes observadas sobre el número de individuos expuestos al riesgo, más fluctuaciones del azar, denominadas $\varepsilon_{x,t}$. La notación $m_{x,t}$ se refiere la tasa de mortalidad subyacente, es la tasa que se debería observar si no hubiera variaciones estocásticas, en otras palabras expresa el valor de la tasa si la población expuesta al riesgo fuera infinitamente grande.

a_x , b_x , y k_t , son los parámetros del modelo y $\varepsilon_{x,t}$ es el término de error. Cuando el modelo se ajusta utilizando mínimos cuadrados ordinarios (MCO), la interpretación de los parámetros es sencilla, los valores estimados de a_x son el promedio de los logaritmos $\ln(\tilde{m}_{x,t})$ a la edad x a través del tiempo, b_x representa el patrón de cambio en la mortalidad según la edad específica, y k_t explica la tendencia en el tiempo. El término $b_x k_t$ de la ecuación (1) implica valores arbitrarios para ambos parámetros debido a que si uno de ellos se multiplica por una constante, para obtener el mismo valor producto al otro se lo debe dividir por el mismo valor. Existen diversas propuestas para incluir restricciones respecto a estos parámetros. Lee y Carter proponer $\sum_x b_x = 1$ y $\sum_t k_t = 0$, también utilizadas por Butt y Renshaw (2009). Dadas estas condiciones, el modelo puede ajustarse minimizando la siguiente suma de cuadrados

$$\sum_{x=1}^X \sum_{t=1}^T [\ln(\tilde{m}_{x,t}) - a_x + b_x k_t]^2 \quad (2)$$

La forma más sencilla de minimizar la ecuación (2) es igualar a_x a los promedios calculados a través de las filas de f_{xt} y obtener k_t y b_x a través de la descomposición en valores singulares de la matriz $(f_{xt} - a_x)$. Lee y Carter propusieron este método para utilizar en el pronóstico del índice mortalidad total, pero también puede utilizarse para el pronóstico de las tendencias según causas específicas de muerte. Esta forma de estimación se debería modificar debido a que las tasas de mortalidad para ciertas causas específicas resultan nulas en determinadas edades, y en estos casos no se puede aplicar el logaritmo que requiere la postulación del modelo. Este inconveniente se puede evitar mediante el ajuste por mínimos cuadrados ponderados, con ponderaciones iguales al número de muertes observadas en cada celda de la matriz de datos. Otra forma alternativa de estimación es postular un modelo probabilístico, en el cuál la estimación de los parámetros se pueden realizar por máxima verosimilitud.

II.2. DVS y re-estimación

En forma abreviada la estimación propuesta por Lee y Carter (1992), consiste en la Descomposición en Valores Singulares (DVS)(Lawson y Hanson, 1974) de la matriz

$$\mathbf{M} = [\ln(\tilde{m}_{x,t}) - a_x] \quad (3)$$

$$DVS[\ln(\tilde{m}_{x,t}) - a_x] = \sum_{i=1}^r \rho_i \mathbf{U}_{x,i} \mathbf{V}_{t,i} \quad (4)$$

Donde $r = \text{rango}[\ln(\tilde{m}_{x,t}) - a_x]$ y ρ_i con $i = \{1, \dots, r\}$ son los valores singulares de la matriz \mathbf{M} en orden creciente. $\mathbf{U}_{x,i}$ y $\mathbf{V}_{t,i}$ son los correspondientes vectores singulares.

La aproximación de la matriz se puede obtener mediante arreglos con dimensión máxima igual al rango de la matriz \mathbf{M} , teniendo en cuenta la magnitud de los valores singulares, si el primero de ellos es lo suficientemente grande, indicaría que una aproximación de rango 1 es suficiente para estimar la matriz \mathbf{M} .

El uso de descomposición en valores singulares genera tasas estimadas que difieren de las observadas, debido a que la estimación se hace sobre los logaritmos de las mismas (Lee, 2000; Bell, 1997). Este sesgo se puede eliminar estimando un “índice ajustado de manera tal que el número de muertes observadas sea igual a las esperadas (Lee, 2000), esto se logra imponiendo la condición.

$$D_{x,t} = \sum_{x=1}^X N_{x,t} \exp(a_x + b_x k_t) \quad (5)$$

donde $\hat{D}_{x,t} = \hat{m}_{x,t} E_{x,t} = e^{\hat{a}_x + \hat{b}_x k_t} E_{x,t}$ es el número estimado de muertes.

II.3. Métodos alternativos de estimación

La implementación de Mínimos Cuadrados Ponderados (MCP) resuelve el problema que genera el uso de DVS, minimizando la siguiente suma de cuadrados de errores (Wilmoth, 1993)

$$\sum_{x=1}^X \sum_{t=1}^T d_{x,t} [\ln(\tilde{m}_{x,t}) - a_x + b_x k_t]^2 \quad (6)$$

teniendo en cuenta las misma restricciones que se le impusieron a los parámetros en la estimación propuesta por Lee-Carter(1992), y siendo $d_{x,t}$ el número de muertes observadas para un intervalo de edad x y año t . Puede ocurrir que no se presenten muertes para un determinado año y una determinada categoría de edad, por lo tanto, un número nulo de defunciones puede constituir una tasa de mortalidad. La elección de $d_{x,t}$, está estadísticamente justificada ya que

$$\text{var}[\ln(\tilde{m}_{x,t})] \approx \frac{1}{d_{x,t}} \quad (7)$$

Utilizando MCP, no es necesaria una segunda etapa de estimación para el cálculo del índice \hat{k}_t .

Bajo el modelo de Lee-Carter (1992), se supone que los errores tienen un comportamiento homocedástico, es decir poseen la misma variancia a través de todas las edades, supuesto que no siempre se cumple. Alho (2000) sugiere utilizar la Estimación por Máxima Verosimilitud (MV-LBP) basado en suponer una distribución Poisson para el número de defunciones $D_{x,t}$, lo que permite la presencia de heterocedasticidad.

Sea $D_{x,t}$ una variable aleatoria que representa las muertes a la edad x en el período t , y siendo $d_{x,t}$ el correspondiente número observado de defunciones, se puede considerar que la variable aleatoria $D_{x,t}$ tiene una distribución Poisson con media $\lambda_{x,t}$ donde $\lambda_{x,t} = m_{x,t}E_{x,t}$ siendo $E_{x,t}$ los expuestos al riesgo a la edad x y el tiempo t .

La función de verosimilitud para una única combinación de edad-tiempo se puede escribir

$$L(d; \lambda) = \frac{\lambda^d e^{-\lambda}}{d!} \quad (8)$$

De forma similar la función de log-verosimilitud es

$$l(d; \lambda) = d \ln(\lambda) - \lambda - \ln(d!) \quad (9)$$

Asumiendo la independencia de las observaciones, se suma a través de las de las distintas edades y tiempos y se obtiene la log-verosimilitud total

$$l = \sum_{xt} (d_{x,t} \ln(\lambda_{x,t}) - \lambda_{x,t} - \ln(d_{x,t}!)) \quad (10)$$

Las estimaciones máximo-verosímiles son los valores de $\lambda_{x,t}$ que maximizan la ecuación (10). Dado que el tercer término de la ecuación no depende de $\lambda_{x,t}$ resulta suficiente maximizar la ecuación

$$\sum_{xt} (d_{x,t} \ln(\lambda_{x,t}) - \lambda_{x,t}) \quad (11)$$

Si no hay restricciones sobre $\lambda_{x,t}$, se verifica que la ecuación alcanza su máximo valor cuando $\lambda_{x,t}=d_{x,t}$. Por otro lado para el modelo de Lee Carter, se requiere

$$\lambda_{x,t} = m_{x,t}E_{x,t} = e^{a_x+b_xk_t} E_{x,t} \quad (12)$$

en consecuencia las estimaciones máximo verosímiles de los parámetros del modelo de Lee-Carter se encuentran sustituyendo $\lambda_{x,t}$ por $e^{a_x+b_xk_t} E_{x,t}$ por en la ecuación (11) y maximizándola con respecto a a_x , b_x , y k_t .

Este enfoque es también conocido como modelo log-bilineal de Poisson y se describe en Brouhns et. al. (2002).

II.4. Algoritmos iterativos

Por ser el modelo no lineal se deben utilizar algoritmos de optimización, entre los algoritmos más difundidos se encuentran los métodos conocidos como “Quasi-newton” y “Simplex”, ambas rutinas de minimización alcanzan resultados similares.

II.5. Software: paquetes y funciones

En el presente trabajo las estimaciones se obtienen a partir del uso de funciones de optimización disponibles en R. Para la implementación de los métodos alternativos de estimación propuestos por Wilmoth (1993) se utilizan los algoritmos de Nelder-Mead (1965), (NM) y Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno (1970), (BFGS). Ambos algoritmos de optimización se pueden aplicar a través del uso de diversas rutinas disponibles para diferentes software. Existen diversas opciones al momento elegir una función determinada. Por ello se aplican las diversas alternativas existentes, a fin de evaluar su desempeño a través de los resultados. Se estudian aspectos tales como, los requisitos de los valores iniciales y la posibilidad de incluir o no restricciones. Los paquetes que presentan un mejor desempeño en este estudio son el paquete alabama: (augmented lagrangian adaptive barrier minimization algorithm), a través de la función “auglag”, que se utiliza para la aplicación del algoritmo BFGS y el paquete dfoptim (derivate free optimization) a través de la función “nmk”, que permite la aplicación del algoritmo NM.

La función de R “auglag” permite incluir restricciones a los parámetros de la función a optimizar de manera directa, ya sean igualdades o desigualdades, y es el mismo algoritmo el que las refuerza con cada iteración. Mientras que en el caso de la función “nmk” se incluyen las restricciones de los parámetros mediante un sumando ponderado agregado a la misma función a optimizar. Para mantener la estabilidad del algoritmo la ponderación se debe ir incrementando en forma progresiva.

III. Bondad de ajuste

Para medir y comparar la bondad de ajuste de los modelos estadísticos se debe probar que los residuos son independientes e idénticamente distribuidos (i.i.d.) Estas condiciones se pueden evaluar utilizando gráficos de contorno. Los mismos emplean colores para indicar la magnitud de los residuos. Los colores más claros indican residuos cercanos a cero y los colores más oscuros indican valores de los residuos grandes en valor absoluto. El sentido positivo o negativo se indica con gamas opuestas de color. Si en los mismos se detecta un patrón en los residuos o bien franjas del mismo color, pueden estar significando falta de independencia en los mismos y/o atribuirse a la existencia de interacción entre edad y tiempo.

Además de los residuos tradicionales (valores observados menos estimados bajo el modelo) para cada método de estimación es posible calcular residuos específicos como por ejemplo en la estimación por MCP se calculan los residuos ponderados:

$$\hat{\xi}_{x,t}^{WLS} = \sqrt{D_{x,t}}(\ln(m_{x,t}) - \hat{a}_x - \hat{b}_x \hat{k}_t), \quad (13)$$

mientras que para la estimación por MV-LBP se utilizan los residuos deviance:

$$r_d = \text{sign}(D_{x,t} - \hat{D}_{x,t}) \left[D_{x,t} \ln\left(\frac{D_{x,t}}{\hat{D}_{x,t}}\right) - (D_{x,t} - \hat{D}_{x,t}) \right]^{1/2} \quad (14)$$

$$\text{donde } \hat{D}_{x,t} = \hat{m}_{x,t} E_{x,t} = e^{\hat{a}_x + \hat{b}_x \hat{k}_t} E_{x,t}$$

Otra alternativa para evaluar el cumplimiento de supuestos acerca de los residuos (Koissi et al., 2006) es realizar gráficos de dispersión de los mismos a través de las edades y los años

evaluados, para verificar si están idénticamente distribuidos. Se espera observar, para un buen ajuste, residuos con baja dispersión que pueden delimitarse con dos bandas.

IV. Los datos

Lee y Carter proponen un período de 30 años como base para realizar el análisis. Los datos disponibles para Argentina referidos a totales de población y defunciones por edad y sexo, comprenden desde 1979 a 2009, que cubre el mínimo propuesto por los autores.

Los datos del período 1979-2001 son proporcionados por el Sistema de Información Estadística de la Organización Mundial de la Salud. La información referente a los últimos años proviene de la Dirección de Estadística e Información de Salud del Ministerio de Salud de la Nación. La existencia de años comunes permite garantizar la continuidad de la serie.

Los grupos etáreos quedan determinados por los siguientes intervalos, el primero de 0 a 4 años y luego intervalos decenales, hasta el último de ellos de 75 o más años de edad, quedando conformadas 9 categorías. La implementación de nueve categorías se basa en el mayor desglose posible que permiten los datos. Esto se debe a que en el período 2002-2009 se dispone de los datos de población en categorías más amplias, que obligan a adoptar este esquema con el fin de poder calcular las correspondientes tasas específicas por edad. En particular se presenta un único intervalo de población desde los cero a los cuatro años, cuando en múltiples estudios es más frecuente que este intervalo se halle dividido en dos, menores de un año (mortalidad infantil) y de uno a cuatro años.

Se actualizan las estimaciones de los parámetros a_x , b_x y k_t (Andreozzi, 2010) por el método LC incluyendo el período 2007-2009. Las mismas son utilizadas como valores iniciales para las estimaciones por Mínimos Cuadrados Ponderados y Máxima Verosimilitud-LBP.

V. Resultados

Se calculan las estimaciones de los parámetros del modelo de Lee y Carter por: 1) el método clásico (Andreozzi, 2010), 2) mínimos cuadrados ponderados (MCP) y 3) máxima verosimilitud-modelo log-bilineal de Poisson (MV-LBP). Para los métodos 2) y 3) se utilizan dos algoritmos iterativos BFGS y NM. La estimación de los parámetros del modelo se realiza para varones, mujeres y total (ambos sexos).

Tabla 1. Estimaciones de los a_x para el total, por MV-LBP y MCP , utilizando algoritmos BFGS y NM.

$a_{x,tot}$ Intervalo	LC	MV-LBP		MCP	
		BFGS	NM	BFGS	NM
0-4	-5,290820	-5,291248	-5,291257	-5,290114	-5,290153
5-14	-8,011304	-8,011792	-8,012182	-8,009787	-8,010131
15-24	-7,035488	-7,033725	-7,033538	-7,032518	-7,032447
25-34	-6,680071	-6,678480	-6,678629	-6,676322	-6,676454
35-44	-6,039942	-6,039951	-6,039956	-6,039412	-6,039517
45-54	-5,168314	-5,168742	-5,168731	-5,168335	-5,168299
55-64	-4,346699	-4,346749	-4,346693	-4,346455	-4,346439
64-74	-3,563899	-3,563587	-3,563539	-3,563208	-3,563165
75 y más	-2,351799	-2,350861	-2,350814	-2,350469	-2,350311

Tabla 2. Estimaciones de los b_x para el total, por MV-LBP y MCP , utilizando algoritmos BFGS y NM.

$b_{x,tot}$ Intervalo	LC	MV-LBP		MCP	
		BFGS	NM	BFGS	NM
0-4	0,289483	0,289252	0,285238	0,289802	0,289615
5-14	0,159453	0,161581	0,161045	0,160412	0,161094
15-24	0,029922	0,027655	0,027883	0,027564	0,027900
25-34	0,080122	0,079071	0,078368	0,078674	0,078928
35-44	0,138031	0,136542	0,135187	0,136637	0,136671
45-54	0,110669	0,110269	0,108774	0,110680	0,110653
55-64	0,076022	0,077075	0,076073	0,077329	0,077255
64-74	0,074281	0,075316	0,074356	0,075649	0,075583
75 y más	0,042017	0,043239	0,042679	0,043254	0,043251

Tabla 3. Estimaciones del índice k_t para el total, por MV-LBP y MCP , utilizando algoritmos BFGS y NM.

$k_{t,tot}$	LC	MV-LBP		MCP	
		BFGS	NM	BFGS	NM
1979	2,170703	2,274933	2,309222	2,272541	2,274698
1980	2,029607	1,892378	1,921914	1,887519	1,891048
1981	2,110375	1,921902	1,951107	1,917949	1,922461
1982	0,699505	1,188720	1,200717	1,205407	1,208129
1983	1,372327	1,381970	1,405505	1,378719	1,383727
1984	1,526835	1,263817	1,283174	1,270949	1,275157
1985	0,619211	0,537014	0,550414	0,533855	0,534622
1986	0,668353	0,663396	0,673454	0,657869	0,658439
1987	0,936585	0,662465	0,670912	0,662835	0,664260
1988	0,751967	0,715151	0,727678	0,709826	0,710158
1989	0,431158	0,555106	0,559774	0,551465	0,553499
1990	0,460633	0,554381	0,564770	0,552761	0,553679
1991	0,225102	0,387234	0,385399	0,385782	0,389450

1992	0,286905	0,317267	0,322517	0,312054	0,311970
1993	0,139769	0,110180	0,113536	0,105509	0,106371
1994	-0,489223	-0,222044	-0,221313	-0,216882	-0,214114
1995	-0,146474	-0,143847	-0,150141	-0,146750	-0,145622
1996	-0,414375	-0,271053	-0,275389	-0,269990	-0,268639
1997	-0,673892	-0,526697	-0,532448	-0,524404	-0,520955
1998	-0,332591	-0,391853	-0,397819	-0,394216	-0,393692
1999	-0,204365	-0,451983	-0,467749	-0,447480	-0,452612
2000	-1,079552	-0,960690	-0,978105	-0,959871	-0,961711
2001	-0,902423	-0,947023	-0,964028	-0,946999	-0,950934
2002	-0,553365	-0,801584	-0,812777	-0,800520	-0,801365
2003	-0,521630	-0,634707	-0,642592	-0,634713	-0,637913
2004	-1,178721	-1,177705	-1,192073	-1,176565	-1,178978
2005	-1,468556	-1,472342	-1,491423	-1,469462	-1,470275
2006	-1,770747	-1,685368	-1,714619	-1,684202	-1,689241
2007	-0,925930	-1,223384	-1,252377	-1,217819	-1,222725
2008	-1,800056	-1,699503	-1,703917	-1,699063	-1,706517
2009	-1,956204	-1,816133	-1,843055	-1,816105	-1,822967

Las estimaciones de los a_x y los b_x , mantienen el mismo comportamiento general que las obtenidas por Androozzi, (2010). Estos resultados son los esperados bajo los supuestos del modelo de Lee-Carter, el cuál postula que los patrones descritos por ambos parámetros son constantes a través de los años. Se evalúan las diferencias entre las estimaciones de los a_x y los b_x realizadas con ambos algoritmos. Las diferencias medias absolutas resultan inferiores al 0.001.

Las estimaciones de los a_x y los b_x , que se obtienen por los métodos de estimación alternativos, MCP y MV-LBP son muy similares, las diferencias medias absolutas entre las estimaciones menores al 0,005 en todos los casos (mujeres, varones y ambos géneros). Mientras que las diferencias en las estimaciones cuando se compara entre algoritmos resultan menores al 0,001. La estimación de los a_x , varían de -5,3 a -2,4 para el total, de -5,2 a -2,2 para los varones, y de -5,4 a -2,5 en las mujeres. En cuanto las estimaciones de b_x , las mismas varían entre 0,004 y 0,38 para ambos géneros, entre 0,02 y 0,33 en los varones y entre 0,05 y 0,24 en las mujeres. Estas estimaciones representan la forma en que la mortalidad se comporta a través de los diferentes grupos de edad. Las estimaciones para total, varones y mujeres del parámetro de “forma”, a_x , para Argentina son similares a los de la mayoría de los países en los que se aplicó el modelo: una mortalidad alta al comienzo de la vida, luego baja rápidamente hasta un mínimo en el intervalo de 5 a 14, aumenta relativamente lento hasta los 35 o 45 años, y de ahí crece más rápidamente, llegando a superar los niveles de las primeras edades, esto coincide con lo expresado por Ortega A., 1987. Como ya se indicó

anteriormente, las estimaciones de los a_x resultan similares para ambos métodos de estimación, MCP y MV-LBP.

Las estimaciones de los b_x describen el cambio en la mortalidad en el intervalo de edad inicial x , frente a un cambio en k_t . Cuando b_x es grande para cierto intervalo de edad, indica que la tasa de mortalidad en dicho intervalo varía sustancialmente cuando el nivel general de mortalidad cambia. Esto sucede en el primer intervalo, dado que los valores más altos de b_x se dan en los grupos etáreos más jóvenes, de 0 a 4 años y de 5 a 14 años, indicando una mayor sensibilidad de estos grupos a las variaciones en el índice de mortalidad general k_t . La alta variabilidad en los valores de este parámetro es resultado del progreso que hizo la medicina para reducir la mortalidad infantil.

Cuando b_x es pequeño, significa que las tasas de mortalidad para esa edad varían levemente cuando el nivel general de mortalidad cambia, se destaca el valor negativo de $b_{15,v}$ para varones, que pertenece al grupo de edad entre 15 y 24 años. Es importante remarcar que el valor es muy cercano al cero, por ello puede indicar también que la tasa para ese grupo es, prácticamente constante.

Se obtienen las nuevas estimaciones del índice general de mortalidad para el período 1979-2009. El índice k_t presenta el mismo comportamiento para el período analizado anteriormente. Para el nuevo período se presenta una considerable suba en el año 2007. Las causas de este pico son motivo de un análisis mayor. Una posible hipótesis este aumento en el índice general, (que se produce principalmente en la categoría de 75 y más años), es que en dicho año se produjeron fríos extremos, las condiciones climáticas podrían haber impulsado un aumento en las muertes de adultos mayores por enfermedades relacionadas con el sistema respiratorio.

Si se comparan los valores correspondientes al índice k_t obtenido por MCP y MV-LBP se obtienen diferencias medias absolutas menores a 0,004. Las estimaciones que se obtienen utilizando los distintos algoritmos, BFGS y NM, presentan diferencias menores al 0.05. Los comportamientos esperados deben ser similares, y las diferencias tienden a desaparecer a medida que aumenta la cantidad de información disponible en años, o a medida que puede desagregarse en más grupos de edad. Por lo tanto, las mínimas variaciones entre las estimaciones podrían ser producto de la cantidad de datos disponibles para la estimación. Se destaca que en el caso de las mujeres, las diferencias son más perceptibles que para varones o para el total, aunque siguen siendo pequeñas. No existe una marcada superioridad de un algoritmo frente al otro en cuanto a los resultados obtenidos, pero sí en cuanto a la facilidad

de implementación. BFGS tiene la ventaja de poder incluir las restricciones al los parámetros de manera directa.

El índice k_t representa la variación en el nivel de mortalidad en el tiempo t , es decir, describe la tendencia general de la mortalidad. El intervalo de variación de $k_{t,tot}$ se extiende desde -1,80 hasta 2,3, aproximadamente. En el caso de las mujeres, $k_{t,m}$, el mismo se encuentra entre -2 y 2,8. Finalmente $k_{t,v}$ se extiende desde -1,7 a 1,9. Además se destaca en todos los casos, que a partir del año 2003 los índices presentan una marcada similitud, incluso para el valor pico que se presenta en el año 2007.

Para evaluar las mejoras que generan los métodos de estimación alternativos del índice general de mortalidad, se calculan las variancias, para las nuevas estimaciones y para las obtenias por el método clásico. Las variancias calculadas para los índices de mortalidad obtenidos por MCP y MV-LBP, resultan en todos casos, menores a las calculadas para las estimaciones por el método clásico, que son los valores iniciales de las metodologías propuestas. Los índices presentan una mayor estabilidad, con respecto a los valores estimados por Andreozzi (2010) en todos los caso analizados.

Tabla 4. Variancia del índice general de mortalidad, para el método clásico, MCP y MV-LBP, estimados con algoritmo BFGS y NM.

Variancia	LC	MV-LBP		MCP	
		BFGS	NM	BFGS	NM
Ambos sexos	1,30050	1,25499	1,29173	1,25284	1,25897
Varones	1,06955	0,98935	0,96043	0,99772	0,99557
Mujeres	1,85459	1,75435	1,71194	1,75228	1,78151

VI. Evaluación de los residuos

La suma de los cuadrados de los residuos (logaritmos estimados menos observados) se calcula tanto usando la estimación del modelo en forma clásica tanto como utilizando MCP y MV-LBP. En todos los casos la suma es mayor para los varones.

Con fines comparativos se calculan diferentes medidas resumen, como la suma de los errores deviance al cuadrado (para los modelos estimados por MV-LBP) y la suma de errores ponderados (en el caso de modelos estimados por MCP). Estas medidas, específicas para cada método de estimación, permiten comparar la utilización del algoritmo BFGS con el algoritmo

de NM. En los tres casos se observan resultados similares, levemente más bajas para BFGS, destacándose la mayor diferencia en el subgrupo de mujeres.

Las sumas de residuos ponderados y deviance resultan más altas para la aplicación del modelo al total, algo menor para la aplicación en varones, y más baja aún en la aplicación del modelo a las tasas observadas en mujeres. Es decir existe consistencia en los resultados obtenidos con los dos métodos, reflejados en el cálculo de medidas específicas.

Tabla 5. Suma de residuos al cuadrado, para el método clásico, MCP y MV-LBP, estimados con algoritmo BFGS y Nealder-Mead.

SSR	LC	MV-LBP		MCP	
		BFGS	NM	BFGS	NM
Total	0.789	0.539	0.538	0.538	0.538
Varones	1.208	0.692	0.693	0.692	0.693
Mujeres	0.942	0.588	0.594	0.590	0.660

Tabla 6. Suma de residuos deviance al cuadrado, para el método MV-LBP, estimados con algoritmo BFGS y Nealder-Mead.

SRdeviance	BFGS	NM
Total	4243.22	4244.07
Varones	3091.11	3091.37
Mujeres	2043.74	2107.44

Tabla 7. Suma de residuos ponderados al cuadrado, para el método MCP, estimados con algoritmo BFGS y Nealder-Mead.

SRponderados	BFGS	NM
Total	8466.68	8467.61
Varones	6156.00	6156.13
Mujeres	4084.33	4217.35

El comportamiento para los residuos tradicionales es similar para ambos métodos de estimación, y las medidas de error (Tabla ...) resultan levemente más pequeñas para el caso de la estimación por máxima verosimilitud. A su vez el desempeño resulta levemente superior para el algoritmo BFGS y la estimación por máxima verosimilitud por ello se profundiza el análisis sobre estas estimaciones.

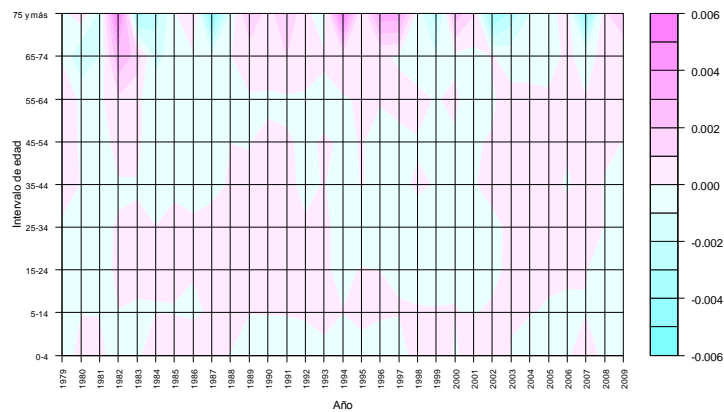
Con la finalidad de observar el comportamiento de los residuos en relación a las tasas, y no a los logaritmos de ellas, como lo estima el modelo, se construyen los residuos de los antilogaritmos de los valores estimados menos las tasas observadas. En un grafico de contorno para residuos independientes se espera observar zonas pequeñas y mezcladas de

colores opuestos (celeste y rosa). En los gráficos realizados para los residuos observados se presentan grupos o bandas que podrían indicar falta de independencia. Se detectan algunos valores alejados del cero para el intervalo de “75 años y más”.

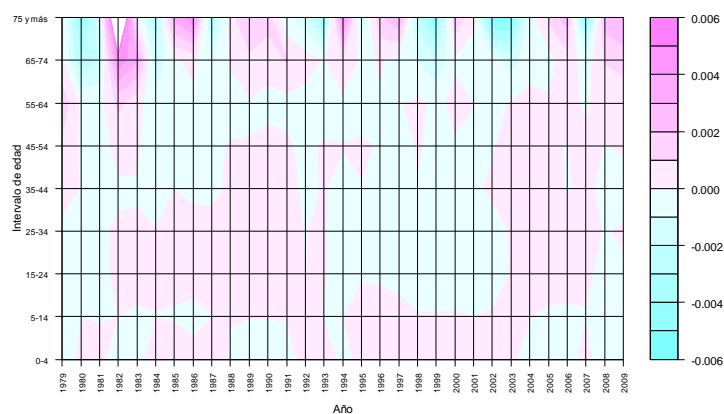
En los tres casos analizados, la estimación los residuos son cercanos al cero, y alternan valores positivos y negativos, aunque no con la alternancia esperada bajo independencia, como ya se indicó. Los posibles “outliers” en la última franja etárea probablemente sean resultado de la amplitud de este último intervalo, que contiene edades con comportamientos diferentes, y que idealmente si la información lo permitiera deberían estar desagregadas.

Figura Gráficos de curvas de nivel para los residuos MV-LBP, utilizando algoritmo BFGS para total, varones y mujeres.

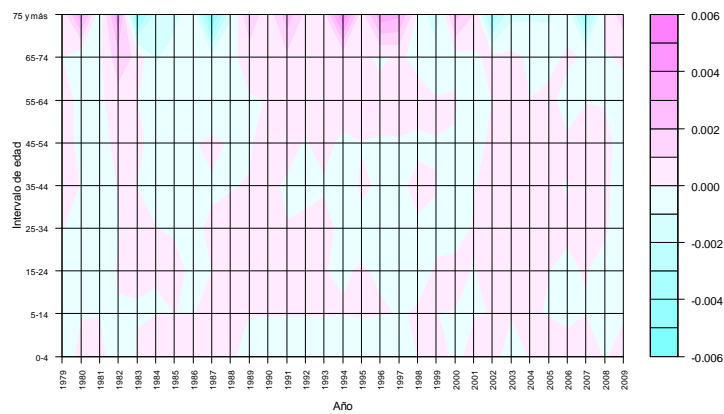
Total



Varones



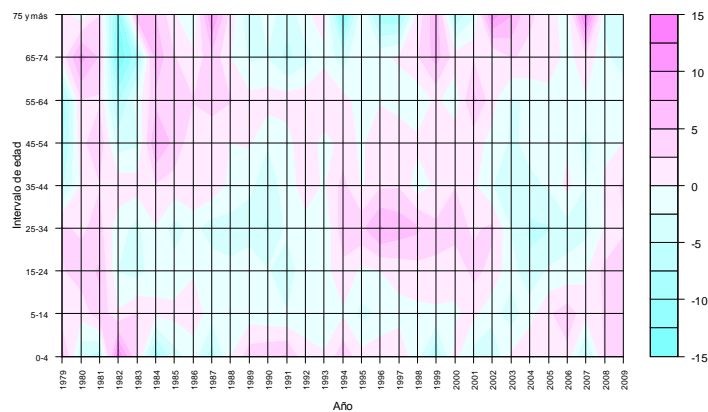
Mujeres



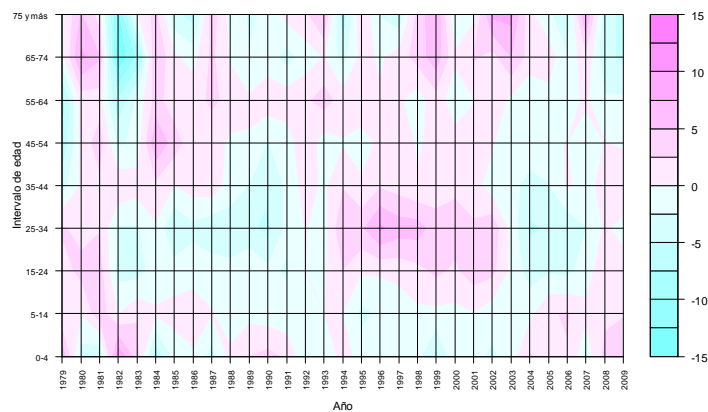
Se evalúa luego el comportamiento de los residuos deviance, específicos para la estimación por máxima verosimilitud, utilizando el gráfico de contorno. La alternancia en los colores no es la esperada. Se observan amplias franjas o bandas del mismo color, igualmente, los residuos son pequeños en valor absoluto, y se alternan en signo, indicando que no hay sobre o subestimación.

Figura .. Residuos deviance

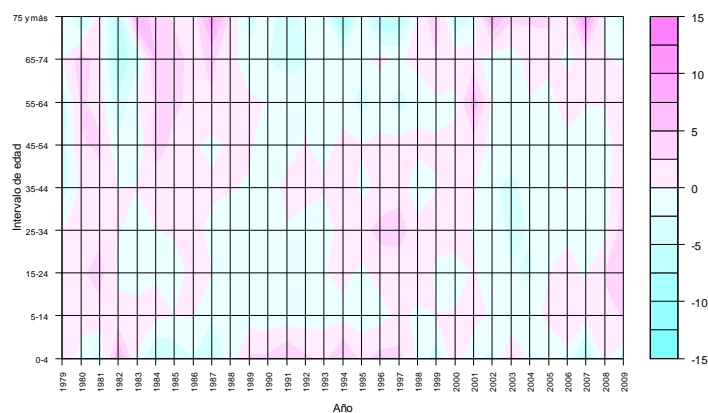
Total



Varones



Mujeres



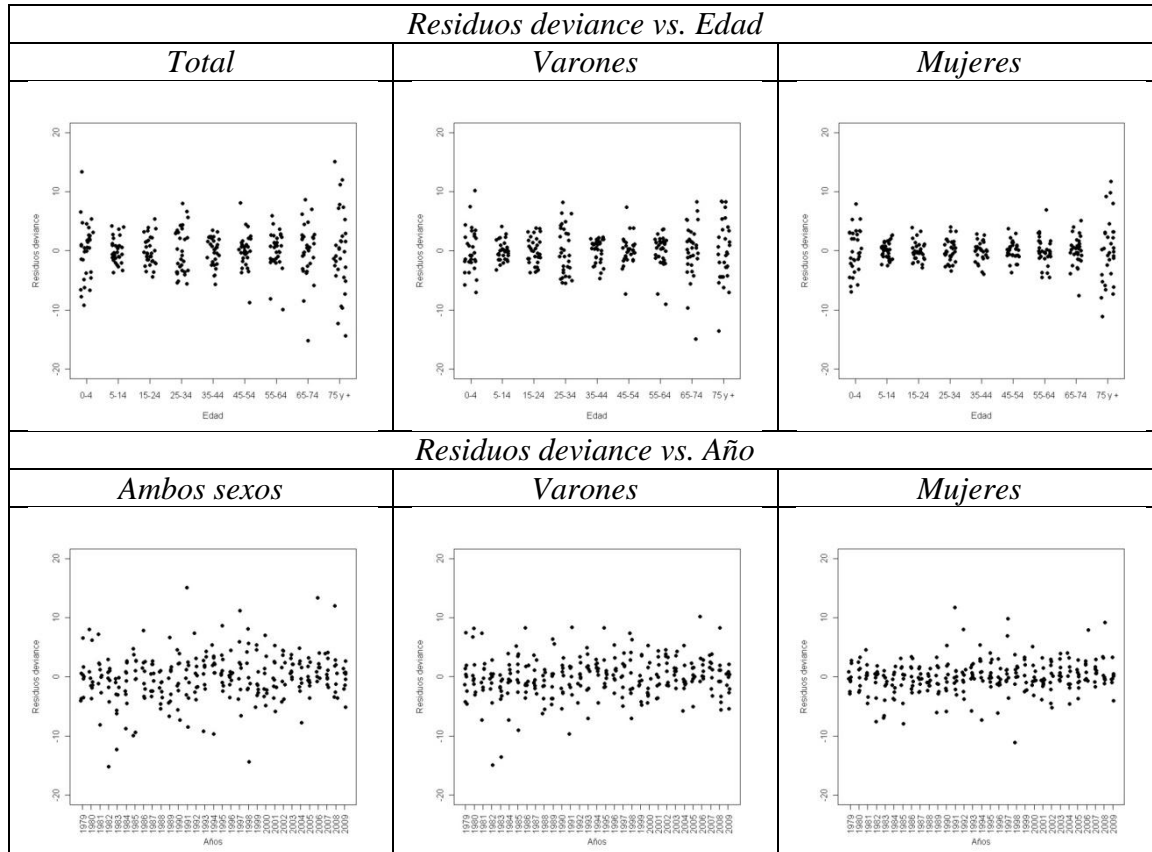
Por último con el fin de evaluar la correlación de los residuos deviance con el tiempo (años) y con la edad (intervalos de edad), se construyen gráficos de dispersión (Figura ...). Se detectan cambios en la variancia de los residuos a través de los grupos etareos, principalmente en edades avanzadas. Este fenómeno está vinculado a la causa antes mencionada relativa al último intervalo. Lee y Carter destacan este mismo aspecto en su artículo original. Los datos de mortalidad para edades superiores a los 80 años no se caracterizan por su confiabilidad y arrastran múltiples problemas de medición (Coale y Kisker, 1987).

El mismo gráfico, evaluado para cada género indica una reducción considerable en la variabilidad en el grupo de las edades, más avanzadas, reafirmando la importancia de modelar por subclase. La variancia observada para los residuos en hombres es levemente superior a la observada en las mujeres.

En los gráficos de dispersión de los residuos a través del tiempo no se detecta ningún tipo de patrón o correlación en ninguno de los casos bajo estudio. Tal como sucede en la comparación a través de las edades, la variabilidad es mayor cuando se analizan ambos generos simultáneamente, y disminuye para los residuos específicos para cada género. En el caso de

los residuos obtenidos a partir del modelo evaluado sobre las mujeres, la variabilidad resulta menor que en el caso de los hombres.

Figura ... Diagramas de dispersión



VII. Conclusiones

Se obtienen las estimaciones de los parámetros del modelo de Lee y Carter mediante el método clásico (Andreozzi, 2010), mínimos cuadrados ponderados (MCP) y máxima verosimilitud-modelo log-bilineal de Poisson (MV-LBP). Se implementan dos algoritmos iterativos BFGS y NM, para los modelos MCP y MV-LBP. La estimación de los parámetros se realiza para varones, mujeres y total. Las mismas mantienen el mismo comportamiento que las obtenidas por Andreozzi, 2010. Las diferencias medias absolutas observadas entre algoritmos es menor al 0,001 en todos los casos y menos a 0,005 al comparar las estimaciones obtenidas por MCP y MV-LBP.

El avance que significan las formas de estimación alternativas en las estimaciones del índice general de mortalidad, se refleja en el cálculo de las variancias. Las mismas resultan para las

nuevas estimaciones, (MCP y MV-LBP), en todos casos menores a las variancias calculadas para las estimaciones por el método clásico, que son los valores iniciales de las metodologías propuestas. En todos los caso analizados, los índices presentan una mayor estabilidad, con respecto a los valores estimados por Andreozzi (2010).

El comportamiento para los residuos es similar para ambos métodos de estimación, y las medidas de error resultan levemente más pequeñas para el caso de la estimación por MV-LBP, además este método contempla la heterocedasticidad presente en los datos. En cuanto a la elección del algoritmo iterativo implementado en la estimación, en este caso el desempeño resulta levemente superior en cuanto a los diversos aspectos evaluados para el algoritmo BFGS, siendo al mismo tiempo de aplicación directa y sencilla.

VIII. Bibliografía

Alho, Juha M. (2000). “*A statistical look at Modeen’s forecast of the population of Finland in 1934.*” Yearbook of Population Research in Finland, Vol. 36, 2000, 107-20 pp.

Andreozzi, L. (2010).

Broyden, C. (1970), ‘*The convergence of a class of double-rank minimization algorithms*’, Journal of the Institute of Mathematics and Its Applications pp. 76–79.

Brouhns N., Denuit M. (2001), “*Tables de mortalite prospectives pour la population belge*”, Discussion Paper 0138, Institut de Statistique, Univ. Catholique de Louvain

Brouhns, N., Denuit, M., Vermunt, J., (2002). “*A Poisson log-linear regression approach to the construction of projected life tables*”. Insurance: Mathematics and Economics 31, 373–393

Coale, A., Kisker, E.E. (1987) “*Defects in data in old age mortality in the United States: New procedures for approximately accurate mortality schedules and lifes tables at the highest ages*”. Asian and Pacific population fórum. 4 (1) 1-31

Fletcher, R. (1970), ‘*A new approach to variable metric algorithms*’, Computer Journal pp. 317–322.

Goldfarb, D. (1970), ‘*A family of variable metric updates derived by variational means*’, Mathematics of Computation pp. 23–26.

Koissi, M.C, Shapiro, A.F., Hognas, G (2006) “Evaluating and extending the Lee–Carter model for mortality forecasting: Bootstrap confidence interval” Insurance: Mathematics and Economics 38 1–20.

Lawson, C., Hanson, R., (1974). “Solving Least Squares Problems”. Prentice-Hall, EngleWood Cliffs, NJ.

Lee, R. D., Carter, L. (1992). “Modeling and Forecasting the Time Series of U.S. Mortality.” Journal of the American Statistical Association 87:659-71.

Lee, R. D. and Nault, F. (1993). “Modeling and Forecasting Provincial Mortality in Canada.” Presented at the World Congress of the International Union for the scientific Study of Population, Montreal.

Lee R D, Miller T. (2001). “Evaluating the performance of the Lee-Carter method for forecasting mortality.” Demography, 38 (4): 537–549.

Lee, R. D. and Rofman, R. (1994). “Modeling and Forecasting Mortality in Chile.” *Notas* 22, No. 59:182-213.

Ministerio de Salud. Dirección de Estadística e Información de Salud. Programa Nacional de Estadísticas de Salud. (2000). “Modelos de Formularios e Instructivos del Sistema de Estadísticas Vitales”. Buenos Aires, Argentina.

Nelder, J.A., & Mead N. (1965), “Simplex Method for function minimization”, Computer Journal. Vol. 7. pp 308–313. 1965

Ortega A. (1987), “Tablas de mortalidad”, CELADE, Serie E N° 1004, San José, Costa Rica.

Shanno, D. (1970), ‘Conditioning of quasi-newton methods for function minimization’, Mathematics of Computation 24, 647–656.

Wilmoth, J. R. (1993). “Computational Methods for Fitting and Extrapolating the Lee-Carter Model of Mortality change.” Technical Report, Department of Demography”, University of California, Berkeley.

Wilmoth, John R. (1996). “Mortality Projections for Japan: A comparison of Four Methods.” Health and Mortality among Elderly Population, Eds Graziella, Caselli and Alan Lopez. New York: Oxford University Press.

IX. Anexo

Tabla . Estimaciones de los $a_{x,v}$ para varones, por MV-LBP y MCP , utilizando algoritmos BFGS y NM.

$a_{x,v}$	LC	MV-LBP	MCP
-----------	----	--------	-----

Intervalo		BFGS	NM	BFGS	NM
0-4	-5,193458	-5,194695	-5,194329	-5,193568	-5,193285
5-14	-7,855823	-7,855378	-7,853529	-7,854026	-7,853913
15-24	-6,723580	-6,720728	-6,720997	-6,719208	-6,719273
25-34	-6,416784	-6,413683	-6,413711	-6,409881	-6,409615
35-44	-5,804779	-5,804666	-5,804619	-5,804058	-5,804080
45-54	-4,876080	-4,876377	-4,876328	-4,875926	-4,875830
55-64	-4,017230	-4,017160	-4,017260	-4,016886	-4,016796
64-74	-3,242092	-3,241428	-3,241308	-3,240785	-3,240872
75 y más	-2,197866	-2,196772	-2,196848	-2,196274	-2,196245

Tabla . Estimaciones de los a_x para mujeres, por MV-LBP y MCP , utilizando algoritmos BFGS y NM.

$a_{x,m}$	LC	MV-LBP		MCP	
Intervalo		BFGS	NM	BFGS	NM
0-4	-5,403233	-5,402191	-5,402129	-5,400476	-5,400325
5-14	-8,203399	-8,203602	-8,206531	-8,201266	-8,202122
15-24	-7,516199	-7,514955	-7,513075	-7,513379	-7,506508
25-34	-7,052314	-7,052112	-7,052863	-7,050527	-7,047505
35-44	-6,344224	-6,344229	-6,344837	-6,343496	-6,344908
45-54	-5,564001	-5,564349	-5,564570	-5,563994	-5,564082
55-64	-4,784588	-4,784490	-4,784257	-4,784006	-4,783693
64-74	-3,922505	-3,922452	-3,922679	-3,922185	-3,922275
75 y más	-2,458517	-2,457430	-2,457262	-2,456943	-2,456790

Tabla . Estimaciones de los b_x para varones, por MV-LBP y MCP , utilizando algoritmos BFGS y NM.

$b_{x,v}$	LC	MV-LBP		MCP	
Intervalo		BFGS	NM	BFGS	NM
0-4	0,330971	0,330570	0,334227	0,329879	0,329993
5-14	0,189618	0,187158	0,183125	0,187276	0,186848
15-24	-0,020508	-0,020662	-0,023811	-0,020049	-0,020205
25-34	0,035676	0,038630	0,037228	0,038777	0,038729
35-44	0,148330	0,145641	0,146865	0,145446	0,145443
45-54	0,138190	0,136634	0,138202	0,136649	0,136732
55-64	0,092206	0,092796	0,093704	0,092697	0,092758
64-74	0,063756	0,065273	0,066124	0,065387	0,065450
75 y más	0,021761	0,023959	0,024344	0,023937	0,023984

Tabla . Estimaciones de los b_x para mujeres, por MV-LBP y MCP , utilizando algoritmos BFGS y NM.

$b_{x,m}$	LC	MV-LBP		MCP	
Intervalo		BFGS	NM	BFGS	NM
0-4	0,242120	0,240553	0,242819	0,240652	0,237411

5-14	0,128239	0,130139	0,126855	0,130006	0,131624
15-24	0,113284	0,111794	0,110576	0,111567	0,113176
25-34	0,142372	0,140333	0,140239	0,139767	0,140215
35-44	0,124789	0,123767	0,124254	0,123847	0,123304
45-54	0,070477	0,070331	0,070623	0,070596	0,070379
55-64	0,054761	0,055690	0,055961	0,055829	0,055998
64-74	0,079562	0,080725	0,081587	0,080958	0,080501
75 y más	0,044397	0,046668	0,047313	0,046778	0,047391

Tabla . Estimaciones del índice k_t para varones, por MV-LBP y MCP , utilizando algoritmos BFGS y NM.

$k_{t,v}$	LC	MV-LBP		MCP	
		BFGS	NM	BFGS	NM
1979	1,736792	1,896198	1,865463	1,909674	1,908066
1980	1,954074	1,668874	1,642286	1,672204	1,670030
1981	1,883432	1,667674	1,639296	1,672721	1,670959
1982	0,299911	1,005740	0,989969	1,030663	1,029579
1983	0,930780	1,146164	1,129506	1,150882	1,148058
1984	1,357896	1,092989	1,118524	1,104594	1,104724
1985	0,366051	0,438622	0,440555	0,437508	0,435164
1986	0,437208	0,570402	0,545245	0,568720	0,568708
1987	0,718369	0,545773	0,542443	0,545574	0,544632
1988	0,610313	0,646104	0,625616	0,643813	0,641832
1989	0,380545	0,517177	0,509186	0,516116	0,514046
1990	0,377076	0,508254	0,507351	0,509613	0,510556
1991	0,370855	0,433254	0,424708	0,431412	0,428389
1992	0,443052	0,360383	0,357342	0,357809	0,358635
1993	0,346946	0,175332	0,153829	0,172785	0,173950
1994	-0,184717	-0,037317	-0,039084	-0,038624	-0,039501
1995	0,069901	-0,054555	-0,058818	-0,057314	-0,055832
1996	-0,068475	-0,079972	-0,077470	-0,081900	-0,079447
1997	-0,353123	-0,342318	-0,341194	-0,345034	-0,343439
1998	-0,059522	-0,256510	-0,258803	-0,259744	-0,257197
1999	0,014281	-0,382853	-0,374781	-0,379491	-0,379058
2000	-0,793096	-0,766597	-0,772320	-0,771745	-0,771449
2001	-0,761746	-0,859826	-0,853000	-0,865410	-0,865003
2002	-0,412561	-0,741332	-0,729977	-0,745415	-0,745517
2003	-0,423798	-0,699491	-0,689273	-0,703496	-0,703365
2004	-1,182212	-1,088723	-1,057758	-1,092480	-1,091335
2005	-1,450440	-1,317835	-1,304344	-1,323942	-1,322886
2006	-1,799735	-1,519526	-1,503088	-1,524268	-1,523141
2007	-0,992417	-1,232804	-1,204412	-1,238081	-1,235396
2008	-1,815419	-1,569432	-1,524766	-1,573254	-1,571595
2009	-2,048675	-1,723850	-1,701311	-1,723890	-1,722888

Tabla . Estimaciones del índice k_t para mujeres, por MV-LBP y MCP , utilizando algoritmos BFGS y NM.

$k_{t,m}$	LC	MV-LBP		MCP	
		BFGS	NM	BFGS	NM
1979	2,750600	2,831009	2,801036	2,825919	2,840769
1980	2,200299	2,197131	2,187336	2,193519	2,202883
1981	2,458700	2,302206	2,286765	2,298365	2,340553
1982	1,136391	1,524967	1,499681	1,539628	1,462107
1983	1,942192	1,767852	1,703102	1,764706	1,819010
1984	1,812645	1,531958	1,508756	1,536093	1,509363
1985	0,950647	0,736885	0,719140	0,737062	0,862445
1986	0,974170	0,867235	0,862451	0,861991	0,899734
1987	1,248766	0,861226	0,872992	0,869175	0,875531
1988	0,966437	0,845513	0,829208	0,839380	0,887770
1989	0,495507	0,623540	0,598270	0,618541	0,632007
1990	0,580054	0,640385	0,627512	0,635769	0,660389
1991	0,081217	0,319529	0,321441	0,321135	0,281290
1992	0,145631	0,240468	0,243220	0,235721	0,199176
1993	-0,076266	-0,013102	-0,023942	-0,018503	0,004330
1994	-0,891715	-0,504292	-0,503446	-0,496067	-0,692840
1995	-0,381893	-0,292352	-0,269292	-0,296548	-0,359633
1996	-0,851919	-0,583644	-0,582763	-0,582644	-0,593927
1997	-1,088961	-0,802350	-0,787689	-0,800158	-0,879832
1998	-0,637701	-0,639175	-0,621567	-0,644454	-0,651790
1999	-0,414606	-0,605934	-0,595095	-0,604087	-0,501816
2000	-1,472047	-1,281708	-1,293429	-1,281978	-1,362226
2001	-1,155020	-1,182342	-1,189416	-1,182203	-1,230649
2002	-0,708847	-0,957149	-0,947444	-0,954406	-0,798739
2003	-0,596900	-0,603986	-0,564873	-0,601594	-0,651816
2004	-1,213631	-1,287427	-1,256410	-1,288556	-1,261186
2005	-1,571263	-1,646721	-1,625997	-1,650905	-1,613525
2006	-1,865695	-1,861454	-1,849660	-1,863906	-1,757637
2007	-0,860717	-1,231981	-1,199900	-1,212882	-1,201284
2008	-1,939207	-1,879653	-1,877574	-1,883833	-1,967804
2009	-2,039478	-1,916638	-1,872935	-1,914279	-1,952654